哥德巴赫猜想

陈景润

目　　录

引　　言

1742 年，德国数学家 Christian Goldbach (1690—1764) 在和他的好朋友、大数学家 Leonhard Euler (1707—1783) 的几次通信中，提出了关于正整数和素数之间关系的两个推测，用现在确切的话来说，就是：

(A) 每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和；

(B) 每一个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和.

这就是著名的 Goldbach 猜想. 我们把猜想 (A) 称为"关于偶数的 Goldbach 猜想"，把猜想 (B) 称为"关于奇数的 Goldbach 猜想". 由于

$$2n + 1 = 2(n - 1) + 3,$$

所以，从猜想(A)的正确性就立即推出猜想(B)亦是正确的. Euler 虽然没有能够证明这两个猜想，但是对它们的正确性是深信不疑的. 1742 年 6 月 30 日，在给 Goldbach 的一封信中他写道：我认为这是一个肯定的定理，尽管我还不能证明出来.

Goldbach 猜想提出到今天已经有 237 年了，可是至今还不能最后地肯定它们的真伪. 人们积累了许多宝贵的数值资料[1]，都表明这两个猜想是合理的. 这种合理性以及猜想本身所具有的极其简单、明确的形式，使人们和 Euler 一样，也不由得不相信它们是正确的. 因而，二百多年来这两个猜想一直吸引了许许多多数学工作者和数学爱好者，特别是不少著名数学家的注意和兴趣，并为此作出了艰巨的努力. 但是，直至本世纪，对这两个猜想的研究才取得了一系列引人瞩目的重大进展. 迄今得到的最好结果是，(1) 1937 年，苏联数学家 И. М. Виноградов[132] 证明了：每一个

1) 例如，Shen Mok Kong 验证了猜想(A)对于所有不超过 33×10^6 的偶数都是正确的.

充分大的奇数都是三个奇素数之和;(2) 1966 年,我国数学家陈景润[18]证明了：每一个充分大的偶数都可以表为一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和. 这是两个十分杰出的成就. Виноградов 的结果基本上证明了猜想 (B) 是正确的[1]. 所以，现在说到 Goldbach 猜想时，总是只指猜想 (A)，即关于偶数的 Goldbach 猜想.

下面我们简要地谈一谈研究 Goldbach 猜想的历史.

从提出 Goldbach 猜想到十九世纪结束这一百六十年中,虽然许多数学家对它进行了研究，但并没有得到任何实质性的结果和提出有效的研究方法. 这些研究大多是对猜想进行数值的验证，提出一些简单的关系式或一些新的推测(见 L. E. Dickson: History of the Theory of Numbers, I, 421—425). 总之,数学家们还想不出如何着手来对这两个猜想进行哪怕是有条件的极初步的有意义的探讨. 但我们也应该指出：古老的筛法，以及在此期间内 Euler, Gauss, Dirichlet, Riemann, Hadamard 等在数论和函数论方面所取得的辉煌成就，为二十世纪的数学家们对猜想的研究提供了强有力的工具和奠定了不可缺少的坚实基础.

1900年,在巴黎召开的第二届国际数学会上，德国数学家 D. Hilbert 在其展望二十世纪数学发展前景的著名演讲中，提出了二十三个他认为是最重要的没有解决的数学问题，作为今后数学研究的主要方向,并期待在这新的一个世纪里,数学家们能够解决这些难题. Goldbach 猜想就是 Hilbert 所提出的第八问题的一部分. 但是，在此以后的一段时间里，对 Goldbach 猜想的研究并未取得什么进展. 1912 年，德国数学家 E. Landau 在英国剑桥召开的第五届国际数学会上十分悲观地说：即使要证明下面较弱的命题 (C)，也是当代数学家所力不能及的：

---

1) 后来，Бороздкий[6] 具体计算出，当奇数 $N \geqslant e^{e^{16.038}}$ 时，就一定可以表为三个奇素数之和. $e^{e^{16.038}}$是一个比 10 的 400 万次方还要大的数(目前知道的最大素数是 Mersenne 素数 $2^{21701}-1$，这只是一个 6533 位数). 而对于如此巨大的数字,我们根本没有可能来一一验证对所有小于它的每一个奇数来说,猜想(B)是否一定成立. 所以，Виноградов 是基本上解决了猜想 (B).

(C) 存在一个正整数 k，使每一个 $\geqslant 2$ 的整数都是不超过 k 个素数之和。

1921 年，英国数学家 G. H. Hardy 在哥本哈根数学会作的一次讲演中认为：Goldbach 猜想可能是没有解决的数学问题中的最困难的一个。

就在一些著名数学家作出悲观预言和感到无能为力的时候，他们没有料到，或者没有意识到对 Goldbach 猜想的研究正在开始从几个不同方向取得了为以后证明是重大的突破，这就是：1920 年前后，英国数学家 Hardy，Littlewood 和印度数学家 Ramanujan 所提出的"圆法"[41],[42]；1920 年前后，挪威数学家 Brun[9] 所提出的"筛法"；以及 1930 年前后，苏联数学家 Шнирельман[109] 所提出的"密率"。在不到 50 年的时间里，沿着这几个方向对 Goldbach 猜想的研究取得了十分惊人的丰硕成果，同时也有力地推进了数论和其它一些数学分支的发展。

(一) 圆　　法

首先我们来谈谈圆法。从 1920 年开始，Hardy 和 Littlewood 以总标题为《Some problems of "Partitio numerorum"》发表了七篇论文。在这些文章中，他们系统地开创与发展了堆垒素数论中的一个崭新的分析方法。其中 1923 年发表的第 III，V 二篇文章就是专门讨论 Goldbach 猜想的[42]。这个新方法的思想在 1918 年 Hardy 和 Ramanujan[41] 的文章中已经出现过。后来人们就称这个新方法为 Hardy-Littlewood-Ramanujan 圆法。对于 Goldbach 猜想来说，圆法的思想是这样的：设 m 为整数，由于积分

$$\int_0^1 e(m\alpha)d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $e(x) = e^{2\pi i x}$，所以方程

$$N = p_1 + p_2, \quad p_1, p_2 \geqslant 3 \tag{2}$$

的解数

$$D(N)=\int_0^1 S^2(\alpha,N)e(-N\alpha)d\alpha; \tag{3}$$

方程

$$N=p_1+p_2+p_3,\quad p_1,p_2,p_3\geqslant 3 \tag{4}$$

的解数

$$T(N)=\int_0^1 S^3(\alpha,N)e(-N\alpha)d\alpha, \tag{5}$$

其中

$$S(\alpha,N)=\sum_{2<p\leqslant N} e(\alpha p). \tag{6}$$

这样，猜想 (A) 就是要证明：对于偶数 $N\geqslant 6$ 有

$$D(N)>0; \tag{7}$$

猜想 (B) 就是要证明：对于奇数 $N\geqslant 9$ 有

$$T(N)>0. \tag{8}$$

因此，Goldbach 猜想就被归结为讨论关系式 (3) 及 (5) 中的积分了. 显然，为此就需要研究由 (6) 所确定的以素数为变数的三角和. 他们猜测三角和 (6) 有如下的性质：当 α 和分母"较小"的既约分数"较近"时，$S(\alpha,N)$ 就取"较大"的值；而当 α 和分母"较大"的既约分数"接近"时，$S(\alpha,N)$ 就取"较小"的值（这里的"较小"、"较大"、"较近"的确切含义将在下面作进一步的说明）. 进而他们认为，关系式 (3) 及 (5) 中积分的主要部分是在以分母"较小"的既约分数为中心的一些"小区间"（即那些和它距离"较近"的点组成的区间）上，而在其余部分上的积分可作为次要部分而忽略. 这就是圆法的主要思想. 为了实现这一方法，首先就要把积分区间分为上述的二部分，其次把主要部分上的积分计算出来，最后要证明在次要部分上的积分相对于前者来说可以忽略不计. 下面我们更具体地来加以说明.

设 Q，τ 为二个正数，

$$1\leqslant Q\leqslant \tau\leqslant N. \tag{9}$$

考虑 Farey 数列

$$\frac{a}{q},\quad (a,q)=1,\quad 0\leqslant a<q,\quad q\leqslant Q. \tag{10}$$

并设[1]

$$E(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{\tau}\right] \tag{11}$$

以及[2]

$$E_1 = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant Q} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} E(q, a), \tag{12}$$

$$E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right] \Big\backslash E_1. \tag{13}$$

容易证明,满足条件

$$2Q^2 < \tau \tag{14}$$

时,所有的小区间 $E(q, a)$ 是二二不相交的(第六章 § 1). 我们称 E_1 为基本区间 (Major arcs), E_2 为余区间 (Minor arcs). 如果一个既约分数的分母不超过 Q, 我们就说它的分母是“较小”的, 反之就说是“较大”的. 如果两个点之间的距离不超过 τ^{-1}, 我们就说是“较近”的. 显然,当 $\alpha \in E_1$ 时,它就和一分母“较小”的既约分数“接近”. 可以证明(见第六章 § 1 引理 2), 当 $\alpha \in E_2$ 时, 它一定和一分母“较大”的既约分数“接近”. 这样,利用 Farey 数列就把积分区间 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right]$ 分成了圆法所要求的二部分 E_1 和 E_2[3].
因而,我们有

$$D(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, N)e(-N\alpha)d\alpha = D_1(N) + D_2(N), \tag{15}$$

其中

$$D_i(N) = \int_{E_i} S^2(\alpha, N)e(-N\alpha)d\alpha, \quad i = 1, 2;$$

以及

---

1) 有时亦取 $E(q,a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right]$.

2) $\cup$ 与 $\backslash$ 是集合的和与差的符号. 由于被积函数的周期为 1, 为方便起见,我们把积分区间 $[0, 1]$ 改为 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right]$.

3) 这种方法通常称为 Farey 分割.

$$T(N)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)d\alpha = T_1(N)+T_2(N), \quad (16)$$

其中

$$T_i(N)=\int_{E_i} S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)d\alpha. \qquad i=1,2.$$

圆法就是要计算出 $D_1(N)$ 及 $T_1(N)$，并证明它们分别为 $D(N)$ 及 $T(N)$ 的主要项，而 $D_2(N)$ 及 $T_2(N)$ 分别可作为次要项而忽略不计。

Hardy-Littlewood[42,III] 首先证明了一个重要的假设性结果：如果存在一个正数 $\theta<\frac{3}{4}$，使得所有的 Dirichlet L 函数的全体零点都在半平面 $\sigma \leqslant \theta$ 上，则充分大的奇数一定可以表为三个奇素数之和，且有渐近公式

$$T(N) \sim \frac{1}{2}\mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N}, \quad N\to\infty, \qquad (17)$$

其中

$$\mathfrak{S}_3(N)=\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right). \qquad (18)$$

同时他们猜测[42,III]，对于偶数 N 应该有

$$D(N)\sim \mathfrak{S}_2(N)\frac{N}{\log^2 N}, \quad N\to\infty, \qquad (19)$$

其中

$$\mathfrak{S}_2(N)=2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}. \qquad (20)$$

Hardy-Littlewood[42,V] 还证明了一个假设性结果：如果广义 Riemann 猜测成立，那末几乎所有的偶数都能表为二个奇素数之和. 更精确的说，若以 $E(x)$ 表示不超过 x 且不能表为二个奇素数之和的偶数个数，他们在 GRH 下证明了

$$E(x)\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad (21)$$

其中 ε 为一任意小的正数.

可以看出，圆法如果成功的话，是十分强有力的. 因为它不但

证明了猜想的正确性，而且进一步得到了表为奇素数之和的表法个数的渐近公式，这是至今别的方法都不可能做到的. 虽然 Hardy-Littlewood 没有证明任何无条件的结果，但是他们所创造的圆法及其初步探索是对研究 Goldbach 猜想及解析数论的至为重要的贡献，为人们指出了一个十分有成功希望的研究方向.

1937 年，T. Esterman[27] 证明：每一个充分大的奇数一定可以表为两个奇素数及一个不超过两个素数的乘积之和.

1937 年，利用 Hardy-Littlewood 圆法，И. М. Виноградов 终于以其独创的三角和估计方法无条件地证明了：每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和，且有渐近公式(17)成立. 这就基本上解决了猜想(B)，是一个重大的贡献. 通常把这一结果称为 Goldbach-Виноградов 定理，简称三素数定理. Page 在 1935 年(见第十章引理 5)及 Siegel 在 1936 年(见第十章引理 9)证明了关于 L 函数例外零点的两个十分重要的结果，由此可推出相应的算术级数中素数分布的重要定理(见第六章 § 2 引理 2 及 § 3 引理 7). Виноградов 首先利用这两个结果之一(用任意一个结果都可以)证明了：对适当选取的 Q 及 τ，有

$$T_1(N) \sim \frac{1}{2}\mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N}, \quad N \to \infty, \tag{22}$$

(见第六章 § 2 定理 1). 而他的主要贡献是在于利用他自己创造的素变数三角和估计方法，证明了 Hardy-Littlewood 关于三角和 $S(\alpha, N)$ 性质的猜测. 简单地说，他证明了：对适当选取的 Q 和 τ，当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^3 N}, \tag{23}$$

(见第五章 § 1). 由此容易推出

$$T_2(N) \ll \frac{N}{\log^3 N}\int_0^1 |S^2(\alpha, N)|\,d\alpha \ll \frac{N^2}{\log^4 N} \tag{24}$$

这表明相对于 $T_1(N)$ 来说，$T_2(N)$ 是可以忽略的次要项. 这样，由(16)，(22)，(24)就证明了三素数定理(见第六章 § 2，当用 Page 的结果时情况要复杂一些，见第六章 § 3).

Виноградов[134],[138],[139] 创造和发展了一整套估计三角和的方法，利用他的强有力的方法使解析数论的许多著名问题得到了重要的成果. 他对数论的发展作出了重要贡献.

1938 年，华罗庚[47]证明了更一般的结果：对任意给定的整数 k，每一个充分大的奇数都可表为 $p_1+p_2+p_3^k$，其中 p_1, p_2, p_3 为奇素数(见第六章 § 5 定理 4).

在 Виноградов 的证明中，有一点稍为不调和的地方. 他创造的线性素变数三角和估计方法，从本质上来说是一种筛法. 这样一来，处理基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N)$ 用的是分析方法，而处理余区间 E_2 上的积分 $T_2(N)$ 用的却是初等的非分析方法[1]. 为了消除这种不一致性，就需要用分析方法来得到线性素变数三角和 $S(\alpha, N)$ 的估计式 (23). 1945 年，Ю. В. Линник[74],[75],[76] 提出了所谓 L 函数零点密度估计方法，他利用这一方法同样证明了估计式 (23)，从而对三素数定理给出了一个有价值的新的完全分析的证明. Линник 的方法在解析数论的许多问题中都有重要应用. 他原来的证明是十分复杂的，后来一些数学家[122],[82],[52]进一步简化了 Линник 的证明(见第四章 § 1，第五章 § 2)，但也仍然是利用零点密度估计方法并要用到比较复杂的分析结果. 1975 年，Vaughan[127] 不用 L 函数零点密度估计方法，给出了估计式 (23) 一个分析证明，但他仍需用到复杂的 L 函数的四次中值公式. 1977 年，潘承彪[91]仅利用 L 函数的初等性质及简单的复变积分法对估计式 (23) 给出了一个新的简单的分析证明(见第五章 § 3).

一些作者还讨论了有限制条件的三素数定理. 例如，证明了充分大的奇数可以表为三个几乎相等的素数之和[44],[84],[37]. 吴方[146]及一些数学工作者还讨论了其它形式的推广.

由上所述，圆法对于猜想 (B) 的研究是极为成功的. 而用它来研究猜想 (A) 却收效甚微，得不到任何重要的结果. 在 Виноградов 证明了三素数定理后不久，利用他的思想，一些数学

1) 最近 R. C. Vaughan(C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **285** (1977), 981—983) 又给出了一个漂亮的初等证明.

家[23], [120], [28], [46], [47] 差不多同时证明了：几乎所有的偶数都可以表为二个奇素数之和．确切地说，他们证明了，对任给的正数 A，我们有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x} \tag{25}$$

(见第十一章 §1)．华罗庚[47]的结果比旁人要强，他还证明了对任意给定的正整数 k，几乎所有的偶数都可表为 $p_1 + p_2^k$，p_1，p_2 为奇素数．

1972 年，Vaughan[126] 证明了：存在正常数 c 使

$$E(x) \ll x \exp(-c\sqrt{\log x}). \tag{26}$$

1973 年，Ramachandra[95] 把结果 (25) 推广到了小区间上 (见第十一章 §3)．

1975 年，Montgomery 和 Vaughan[83] 进一步改进了 (26)，证明存在一个正数 $\Delta > 0$，使

$$E(x) \ll x^{1-\Delta} \tag{27}$$

(见第十一章 § 2)．这是一个很漂亮的结果．在这里他们第一次把大筛法应用于对圆法中基本区间的讨论．为了证明这一结果几乎用到了 L 函数零点分布的全部知识(见第十章)．最近在文献[21]中，定出了常数 $\Delta > 0.01$．

通常我们把可以表为二个奇素数之和的偶数称为 Goldbach 数，而 $E(x)$ 称为不超过 x 的 Goldbach 数的例外集合．以上关于猜想 (A) 的结果是证明了：几乎所有的偶数都是 Goldbach 数，并逐步改进了对 Goldbach 数的例外集合 $E(x)$ 的阶的估计．

此外，还应该提到的是，Линник[77] 首先利用圆法研究了相邻 Goldbach 数之差这一有趣的问题，我们将在第十二章中讨论．

(二) 筛　　法

其次我们来谈谈筛法．在提出圆法的同时，为了研究猜想 (A)，数论中的一个应用广泛的强有力的初等方法——筛法也开

始发展起来了. 要解决猜想(A)实在是太困难了，因此人们设想能否先来证明每一个充分大的偶数是二个素因子个数不多的乘积(通常这种数称为殆素数)之和，由此通过逐步减少素因子的个数的办法来寻求一条解决猜想(A)的道路. 设 a, b 是二个正整数，为方便起见，我们以命题 $\{a, b\}$ 来表示下述命题：每一个充分大的偶数是一个不超过 a 个素数的乘积与一个不超过 b 个素数的乘积之和. 这样，如果证明了命题 $\{1, 1\}$，也就基本上解决了猜想(A).

大家知道，筛法本是一种用来寻找素数的十分古老的方法，是二千多年前的希腊学者 Eratosthenes 所创造的，称为 Eratosthenes 筛法. 我们的素数表基本上就是用这种方法编造的. 但是，由于这种原始的筛法没有什么理论上的价值，所以在很长的时期里都没有进一步的发展. 用现在的语言简单地来说，我们可以这样描述筛法[38]：以 $\mathscr{A}$ 表示一个满足一定条件的由有限多个整数组成的集合(元素可重复)，以 $\mathscr{P}$ 表示一个满足一定条件的无限多个不同的素数组成的集合，$z \geqslant 2$ 为任一正数. 令

$$P(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p \in \mathscr{P}}} p. \tag{28}$$

我们以 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$ 表示集合 $\mathscr{A}$ 中所有和 $P(z)$ 互素的元素的个数，即

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) = \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ (a, P(z))=1}} 1. \tag{29}$$

这里 $P(z)$ 好象是一个“筛子”，凡是和它不互素的数都被“筛掉”，而和它互素的数将被留下，这正是“筛法”这一名称的含意. 这里的“筛子”是和集合 $\mathscr{P}$ 及 z 有关，z 愈大“筛子”就愈大，被“筛掉”的数也就越多，而 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$ 就是集合 $\mathscr{A}$ 经过“筛子” $P(z)$“筛选”后所“筛剩”的元素个数. 我们把 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$ 称为筛函数. 粗略地说，筛法就是研究筛函数的性质与作用，它的一个基本问题就是要估计筛函数 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$ 的上界和正的下界(因为 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$ 总是非负的).

现在，我们先来看一下命题 $\{a, b\}$ 是怎样和筛函数联系起来的. 设 N 为一大偶数，取集合

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(N) = \{n(N-n), \quad 1 \leqslant n \leqslant N\}, \tag{30}$$

$\mathscr{P}$ 为所有素数组成的集合. 再设 $\lambda \geqslant 2$，取 $z = N^{1/\lambda}$. 如果能证明

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{1/\lambda}) > 0, \tag{31}$$

则显然就证明了命题 $\{a, a\}$，这里

$$a = \begin{cases} \lambda - 1, & \lambda \text{ 是正整数}, \\ [\lambda], & \lambda \text{ 不是正整数}. \end{cases} \tag{32}$$

若当 $\lambda = 2$ 时，(31) 成立，则就证明了命题 $\{1, 1\}$. 另一方面，若求得 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{1/\lambda})$ 的一个上界，那么我们就相应地得到了一个大偶数表为二个素因子个数不超过 a 个的数之和的表法个数的上界.

如果我们取集合

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}(N) = \{N - p, \ p \leqslant N\}, \tag{33}$$

那末，如果能证明

$$S(\mathscr{B}; \mathscr{P}, N^{1/\lambda}) > 0, \tag{34}$$

则显然就证明了命题 $\{1, a\}$. 同样，若求得 $S(\mathscr{B}; \mathscr{P}, N^{1/\lambda})$ 的一个上界，那么我们亦就相应地得到了偶数表为一个素数与一个素因子不超过 a 个的数之和的表法个数的上界.

由以上的讨论可清楚地看出，命题 $\{a, b\}$ 和求筛函数的正的下界及上界这一问题是紧密相关的. 而且必须着重指出的是，这里要求 z 所取的值相对于 N 来说不能太小，一定要取 $N^{1/\lambda}$ 那么大的阶，显然 λ 能取得越小越好. 如果一种筛法理论仅能对较小的 z（相对于 N），比如说取 $\log^c N$ 大小时才能证明筛函数有正的下界估计，那么这种筛法理论对于我们的问题来说是无用的. 而古老的 Eratosthenes 筛法却正是这样一种筛法（见 [38]，[50]，[81]）.

直到 1920 年前后，才由 Brun[9] 首先对 Eratosthenes 筛法作了具有理论价值的改进，并利用他的方法证明了命题 $\{9, 9\}$ 这一惊人的结果，从此开辟了利用筛法研究猜想 (A) 及其他许多数论问

题的极为广阔且富有成果的新途径. Brun 对数论作出了重大的贡献. 人们称他的方法为 Brun 筛法. Brun 筛法有很强的组合数学的特征, 比较复杂,而且应用起来并不方便. 不过 Brun 的思想是很有启发性的, 可能仍有进一步探讨的必要(见 [38], [50], [81]).

1950 年前后, A. Selberg[111], [112], [113] 利用求二次型极值的方法对 Eratosthenes 筛法作了另一重大改进, 由他的方法可得到筛函数的上界估计. 这种筛法称为 Selberg 筛法. 把这种方法和 Бухштаб 恒等式(第七章 §1 引理 1) 结合起来就可得到筛函数的下界估计. Selberg 筛法不仅便于应用, 而且迄今为止它总是比 Brun 筛法得到更好的结果. 目前, 对某种筛函数 (也是我们的问题所需要的) 所得到的最好的上界及下界估计是由 Jurkat-Richert[58] 利用 Selberg 筛法所得到的. 本书将仅讨论 Selberg 筛法, 主要目的是证明 Jurkat-Richert 的结果 (见第七章), 为证明命题 $\{1, 2\}$ 作准备.

这里还要指出一点,在前面的讨论中,我们是把命题 $\{a, b\}$ 和对一个筛函数的估计直接相联系的, 而这样做使我们所得到的结果是比较弱的. 1941 年, Kuhn[65] 首先提出了所谓"加权筛法", 利用这种方法使我们可以在同样的筛函数上、下界估计的基础上得到更强的结果. 后来许多数学工作者对各种形式的"加权筛法"进行了深入的研究,从而不断提高了筛法的作用. 陈景润[18], [19] 正是由于提出了他的新的加权筛法才证明了命题 $\{1, 2\}$. 现在所有的最好结果都是利用加权形式的 Selberg 筛法得到的. 我们将在第九章结合命题 $\{1, b\}$ 来对加权筛法作一简单的说明.

下面我们简述命题 $\{a, b\}$ 的发展历史.

1920 年, Brun[9] 证明了命题 $\{9, 9\}$;

1924 年, Rademacher[94] 证明了命题 $\{7, 7\}$;

1932 年, Estermann[26] 证明了命题 $\{6, 6\}$;

1937 年, Ricci[102] 证明了命题 $\{5, 7\}$, $\{4, 9\}$, $\{3, 15\}$ 以及 $\{2, 366\}$;

1938 年，Бухштаб[11] 证明了命题 $\{5, 5\}$；

1939 年，Тартаковский[116] 及 1940 年，Бухштаб[12] 都证明了命题 $\{4, 4\}$；

Kuhn[65][66][67] 在 1941 年提出了"加权筛法"，后来证明了命题 $\{a, b\}$，$a+b \leqslant 6$.

以上的结果都是利用 Brun 筛法得到的.

1950 年，Selberg[113] 宣布用他的方法可以证明命题 $\{2, 3\}$，但在长时期内没有发表他的证明. 以下的结果都是利用 Selberg 筛法得到的.

1956 年，王元[140]证明了命题 $\{3, 4\}$；

1957 年，А. И. Виноградов[130] 证明了命题 $\{3, 3\}$；

1957 年，王元[142,143]证明了命题 $\{2, 3\}$ 以及命题 $\{a, b\}$，$a+b \leqslant 5$.

但是，以上这些结果中，都有一个共同的弱点，就是我们还不能肯定二个数中至少有一个为素数. 为了得到这种结果——即要证明命题 $\{1, b\}$，如前所述，我们就需要估计筛函数 $S(\mathscr{B}; \mathscr{P}, z)$. 在第七章中我们将会看到，在估计筛函数的上界和下界时，同圆法一样，也要计算主要项和估计余项，并证明相对于主项来说余项是可以忽略的. 在证明以上的命题 $\{a, b\}$ 时，余项的估计是初等的比较简单的. 但为了证明命题 $\{1, b\}$，在余项估计上碰到了很大的困难. 这个困难（见第七章 § 1）实质上就是要估计下面的和式

$$\mathscr{R}(x, \eta) = \sum_{d \leqslant x^{\eta}} \mu^2(d) \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} \left| \psi(y; d, l) - \frac{y}{\phi(d)} \right|. \quad (35)$$

为了估计这一和式，就需要利用复杂的解析数论方法. 这种类型的估计通常称为算术级数中素数分布的均值定理（见第八章）.

1948 年[1)]，匈牙利数学家 A. Rényi[99] 首先在这方面作出了开创性的极为重要的推进. 他利用 Линник[72] 所创造的大筛法（见

1）在此之前，Estermann[26] 在 GRH 下证明了命题 $\{1, b\}$，Бухштаб[13] 亦证明了一个有趣的结果. 后来王元[141,142]在 GRH 下证明了命题 $\{1, 4\}$ 及 $\{1, 3\}$.

第二章§2）研究L函数的零点分布，从而证明了：一定存在一个正常数η_0，使对任意的正数$\eta<\eta_0$及任意正数A，有估计式

$$\mathscr{R}(x,\eta)\ll\frac{x}{\log^A x}\tag{36}$$

成立．进而，他利用 Brun 筛法和这一结果证明了命题$\{1,b\}$．但这里的正数η_0及正整数b都是没有定出具体数值的常数，所以这是一个有趣的定性结果．若用他原来的方法去确定常数，η_0将会很小而b将是很大的．这样，具体地定出尽可能大的η_0，并确定b和η_0之间的联系，就是证明命题$\{1,b\}$的关键问题了．

1962年，潘承洞[85]证明了当$\eta_0=\frac{1}{3}$时，估计式(36)成立，并由此得到命题$\{1,5\}$；

1962年，王元[144]从进一步改进筛法着手，由$\eta_0=\frac{1}{3}$推出了命题$\{1,4\}$．同时，他还得到了η_0和b之间的一个非显然联系：从$\eta_0=\frac{1}{3.327}$及$\eta_0=\frac{1}{2.475}$可分别推出命题$\{1,4\}$及$\{1,3\}$．1963年，Левин[69] 把这一结果改进为$\eta_0=\frac{1}{3.27}$及$\eta_0=\frac{1}{2.495}$；

1962年，潘承洞[86]及1963年，Барбан[2] 互相独立地证明了$\eta_0=\frac{3}{8}$时估计式(36)成立，并利用较为简单的筛法就证明了命题$\{1,4\}$；

1965年，Бухштаб[16] 由$\eta_0=\frac{3}{8}$推出了命题$\{1,3\}$；

1965年，А. И. Виноградов[131] 及 E. Bombieri[4] 都证明了$\eta_0=\frac{1}{2}$时估计式(36)成立，Bombieri 的结果要稍强些（见第八章§1)，这一结果通常称为 Bombieri-Виноградов 定理，它的重要性是在于它在某些数论问题中起到了可以代替 GRH 的作用．由这一结果再利用王元或 Левин 的工作，他们就得到了命题$\{1,3\}$．这里应该指出的是，Bombieri 的工作对大筛法，特别是大筛法在数论中的应用作出了重要的贡献(第八章§2)．

1966 年，陈景润[18]宣布他证明了命题 {1, 2}，当时没有给出详细证明，仅简略地概述了他的方法．1973 年，他发表了命题 {1, 2} 的全部证明[19]．应该指出的是，在他宣布结果到发表全部证明的整整七年之中，没有别的数学家给出过命题 {1,2} 的证明，而且似乎国际数学界仍然认为命题 {1, 3} 是最好的结果．因此，当陈景润在 1973 年发表了他的很有创造性的命题 {1, 2} 的全部证明后，立即在国际数学界引起了强烈的反响，公认为这是一个十分杰出的结果，是对 Goldbach 猜想研究的重大贡献，是筛法理论的最卓越运用，并且一致地将这一结果称为陈景润定理．由于这一结果的重要性，在很短的时间内，国内外先后至少发表了命题 {1, 2} 的五个简化证明[38], [88], [39], [107], [32]．

陈景润的贡献，就方法上来说，在于他提出并实现了一种新的加权筛法．在第九章，我们将会看到，为了实现他的加权筛法，在估计余项上出现了 Bombieri-Виноградов 定理所不能克服的困难．后来，在文 [89]，[90] 中指出，利用陈景润的加权筛法证明命题 {1, 2} 的基础是证明下面新的一类均值定理（见第八章 § 2）：

$$\sum_{d \leqslant x^{1/2}\log^{-B} x} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} \left| \sum_{a \in E(x)} g(a)\left(\phi(y; a, l, d) - \frac{y}{\phi(d)a}\right) \right| \ll \frac{x}{\log^{A} x}. \tag{37}$$

这亦是陈景润[20]最近改进 $D(N)$ 上界估计的基础．我们将在第八章讨论 (36)，(37) 二种类型的均值定理，并在第九章证明命题 {1, 3}，{1, 2} 及介绍陈景润改进 $D(N)$ 上界估计的方法．

（三）密　　率

最后，我们极简单地谈谈密率．密率是 Л. Г. Шнирельман[109] 在 1930 年所首先提出的关于自然数集合的一个十分重要的基本概念．密率理论后来有广泛的发展和应用．关于这方面的内容可参看 [51]，[81]，[37]，这里不作介绍了．

在 Landau 提出猜想(C)，并预言证明它是当代数学家力所不及的之后，仅仅过去了二十年，Шнирельман[109] 在 1933 年就利用他的密率理论和 Brun 筛法证明了猜想(C). 但他没有定出其中的常数 k. 如果我们以 s 表示最小的整数，使每一个充分大的正整数都可表为不超过 s 个素数之和 (s 通常称为 Шнирельман 常数)，从 Шнирельман 的方法可以证明 $s \leqslant 800,000$，这一结果后来得到了不断的改进.

1935 年，Романов[106] 证明了 $s \leqslant 2208$;

1936 年，Heilbronn, Landau 及 Sckerk[45] 证明了 $s \leqslant 71$;

1936 年，Ricci[102] 证明了 $s \leqslant 67$;

1950 年，Shapio[114] 证明了 $s \leqslant 20$;

1956 年，尹文霖[147] 证明了 $s \leqslant 18$.

以上结果都是用初等的密率理论结合筛法得到的. 如再利用解析数论的一些高深的结果，可对 s 的数值作进一步的改进. 这方面的结果是:

1968 年，Siebert[115] 及 Кузяшев, Чечуро[68] 都证明了 $s \leqslant 10$;

1976 年，Vaughan[128] 证明了 $s \leqslant 6$.

还应该提出的是，一些作者定出了猜想(C)中的常数 k，这方面的结果是:

1972 年，Климов, Пильтяй 及 Шептицкая[62] 证明了 $k \leqslant 115$;

1975 年，Климов[63] 证明了 $k \leqslant 55$;

1977 年，Vaughan[129] 证明了 $k \leqslant 27$[1].

由于从三素数定理立即可推出 $s \leqslant 4$，所以本书将不讨论密率及其所得到的结果. 当然，关于常数 k 的结果，目前只有用密率的方法才能得到.

以上我们简单地回顾了二百多年来研究 Goldbach 猜想的历史，介绍了主要的研究方法和取得的主要成果. 对 Goldbach 猜想

1) 目前最好的结果是 J. M. Deshouillers (见 *Math. Reviews*, 57 5933) 证明的 $k \leqslant 26$.

的研究有力地推动了数论，函数论等一些数学分支的发展．它和无数例子一样，再一次生动地证明了合理的假设在科学发展中的重要地位和作用．一个有价值的假设，不管它最终被证明是正确的，错误的，或是部分正确，部分错误，都将引导人们去探索新的科学真理，推动科学的向前发展．

从 1966 年陈景润宣布他证明了命题 $\{1, 2\}$，到今天已经过去十三个年头了．应该说在这时期中，对 Goldbach 猜想的研究没有重大的实质性的进展．事情往往是如此，对于研究一个问题来说，迈出开创性的第一步和走上彻底解决它的最后一步都同样是最困难的．虽然，表面上命题 $\{1, 2\}$ 和命题 $\{1, 1\}$——Goldbach 猜想的基本解决——仅“1”之差，但是，看来完成这最后的一步所要克服的困难可能并不比我们已经走过的道路要来得容易．我们也没有多少把握可以肯定，沿着现有的方法一定可以最终解决 Goldbach 猜想．至今对于猜想 (A)，我们甚至还不能给出一个假设性的证明．

只要稍为看一下现有的解析数论的基础理论就不难发现，我们对于 Dirichlet 特征，素数分布，ζ 函数，L 函数理论等方面的知识仍然了解得非常之少．圆法，在对余区间上的积分 $D_2(N)$ 的处理——也就是对线性素变数三角和 $S(\alpha, N)$ 的估计——碰到了巨大的困难．初等的筛法和密率（也需要筛法）虽然和解析方法相结合使它变得十分强有力，但现在的筛法毕竟是十分粗糙的，也许这种方法有其天然的局限性．我们对素数的算术性质同样也知道得极其肤浅．或许可以认为，今天对猜想的研究正处于一个相对的停滞阶段．这就是说，需要我们对原有的方法和结果作出重大的改进，或提出新的方法才有可能使 Goldbach 猜想的研究得到新的推进．因此，把迄今为止研究 Goldbach 猜想的主要方法和得到的主要成果作一总结是必要的和有益的．

二百多年来，许许多多的数学家对 Goldbach 猜想从各个不同角度作了大量的研究，从方法到结果都是极其丰富的．要作一个全面的、恰如其份的、有创见和启发性的总结，显然是不容易的．这

不是本书的任务，也是我们力所不及的．在这一本小书中，我们打算讨论一下圆法和筛法（Selberg 筛法），以及与其有关的大筛法、ζ 函数、L 函数理论、线性素变数三角和估计、复变积分法等．我们要证明的主要结果，是三素数定理和命题 $\{1, 2\}$，同时介绍一下 $D(N)$ 上界估计的改进及有关 Goldbach 数的若干结果．就方法和结果来说，我们比较侧重于基本方法的介绍．有一些结果（如线性素变数三角和估计，算术级数中素数分布的均值定理等）可以用不同的方法加以证明，我们认为这些方法都是重要的，所以都作了介绍．有时，对所用的方法作更细致，技巧更复杂的讨论后，可以得到更强的结果，但为了把基本方法介绍清楚，我们宁可使这里所证明的结果不是最好的（如命题 $\{1, 3\}$，$\{1, 2\}$ 中的系数，$D(N)$ 上界估计中的系数等）．我们希望本书中所介绍的方法不仅对研究 Goldbach 猜想，而且对整个解析数论都是重要的．有些数学家把 Goldbach 猜想看作是一个更广泛的猜想的一部分，本书将丝毫不涉及这种推广．从目前来看，我们认为猜想的最原始，最简单的形式也是最重要的．大家知道，关于偶数 Goldbach 猜想的每一个结果都可相应地推广到孪生素数上去，但本书亦将不讨论这一著名问题．

本书末所列出的文献仅是本书所需要的，当然是不完全的．在[50]，[38]及[82]等著作中附有有关内容的十分详尽的文献．

初等数论和解析数论的基础知识是本书所需要的预备知识．前者主要可参看 [51]，[80]，[137] 及 [43] 等书，后者主要可参看[60]，[25]，[92]，[81] 及 [123] 等书．由于篇幅所限，我们对以下的内容：

(1) $\zeta(s)$ 在临界长条 $0 < \sigma < 1$ 中的阶的估计（见第四章 §2 引理 5）．

(2) $\zeta(s)$ 及 L 函数的非零区域（见第十章 §1 引理 11，第十二章 §1 引理 1）．

(3) Turán 方法（见第十章 §2）．

(4) 素变数三角和 $\sum\limits_{p \leqslant x} e(p^k\alpha)$ 的估计（见第六章 §5 引理 15）．

将不给出证明，在文中将指出参考文献．

第一章 特征与 Gauss 和

设 $\chi(n)$ 为模 q 的特征，m 为一整数，我们称

$$G_\chi(m) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h) e\left(\frac{mh}{q}\right) \tag{1}$$

为 Gauss 和. 这一章主要是研究 Gauss 和 $G_\chi(m)$ 的性质. 由于这里以及本书的大多数章节都要用到有关特征的知识，所以，我们将首先比较详细地来叙述特征的基本概念和性质. 对于所列出的性质我们都不加证明. 因为这些内容很容易在许多数论书中找到(例如可参看 [24], [29], [51], [60], [80], [92], [123] 等).

§1. 特 征

由 L. Dirichlet 所引进的模 q 的特征(或称特征函数)是数论中的一个十分重要的基本概念. 特征的主要作用是在于：利用它我们可以从一个给定的整数序列中把属于某一个公差为 q 的算术数列的子序列分离出来. 因此它在许多数论问题中，特别是 Goldbach 猜想的研究中起着很关键的作用. 特征可以用不同的方法来定义，我们定义特征如下[80]：

定义 设 $q = 2^l p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s}$, p_i 为不同的奇素数 $(1 \leqslant i \leqslant s)$, g_i 为模 $p_i^{l_i}$ 的最小正原根 $(1 \leqslant i \leqslant s)$, 以及

$$c = \begin{cases} 1, & l = 1, \\ 2, & l \geqslant 2, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} 1, & l = 1, \\ 2^{l-2}, & l \geqslant 2, \end{cases}$$
$$c_i = \phi(p_i^{l_i}), \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$$

其中 $\phi(d)$ 为 Euler 函数，则对于任意给定的一组整数 m, m_0, m_1, $\cdots$, m_s, 我们称定义在整数集合上的函数

$$\chi(n)=\begin{cases}e\left(\frac{m\gamma}{c}\right)e\left(\frac{m_0\gamma_0}{c_0}\right)e\left(\frac{m_1\gamma_1}{c_1}\right)\cdots e\left(\frac{m_s\gamma_s}{c_s}\right), & (n,q)=1\\ 0, & (n,q)>1\end{cases}\tag{2}$$

为模 q 的特征(或特征函数),其中 $\gamma,\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 为 n 对模 q 的一个指标组.

为了着重指出特征 $\chi(n)$ 是属于模 q 的，我们经常采用记号 $\chi_q(n)$ 或 $\chi(n)\bmod q$.

下面我们来列出有关特征的一些基本知识.

1. 模 q 的特征 $\chi(n)$ 称为模 q 的主特征，如果当 $(n,q)=1$ 时恒有 $\chi(n)=1$，主特征记为 $\chi^0(n)$. 其它所有的特征都称为非主特征. 只取实值的特征称为实特征,其它的称为复特征.

2. 模 q 的特征 $\chi(n)$ 是以 q 为周期的周期函数,且 $\chi(1)=1$, $|\chi(n)|=1$, $(n,q)=1$.

3. 特征 $\chi(n)$ 是完全可乘函数,即对任意的整数 n_1, n_2 有

$$\chi(n_1n_2)=\chi(n_1)\chi(n_2).$$

4. 对于一个固定的模 q 来说，有且仅有 $\phi(q)$ 个不同的模 q 的特征.

5. 我们有

$$\sum_{n=1}^{q}\chi(n)=\begin{cases}\phi(q), & \chi=\chi^0\\ 0, & \chi\neq\chi^0,\end{cases}\tag{3}$$

以及当 $(a,q)=1$ 时有

$$\sum_{\chi}\bar{\chi}(a)\chi(n)=\begin{cases}\phi(q), & n\equiv a(q),\\ 0, & n\not\equiv a(q),\end{cases}\tag{4}$$

其中求和号 $\sum\limits_{\chi}$ 表示对模 q 的所有的特征求和.

6. 设 χ_{q_1}, χ_{q_2} 分别为模 q_1, q_2 的特征,则

$$\chi(n)=\chi_{q_1}(n)\chi_{q_2}(n)$$

为模 $q=[q_1,q_2]$ 的特征. 由于模 q 的特征一定亦是模 q' 的特征，只要 q' 和 q 有相同的素因子，且 $q|q'$，所以我们以后总规定乘积

$\chi_1(n)\chi_2(n)$ 为模 $[q_1, q_2]$ 的特征，对二个以上的特征相乘时亦一样，即设 χ_{q_i} 为模 q_i 的特征 $(1\leqslant i\leqslant k)$，则乘积 $\chi_{q_1}\cdots\chi_{q_k}$ 总规定为是模 $[q_1,\cdots,q_k]$ 的特征。

7. 设 $\chi(n)$ 为模 q 的特征，$q=q_1q_2$，$(q_1,q_2)=1$，则一定存在唯一的一对模 q_1，q_2 的特征 $\chi_{q_1}(n)$，$\chi_{q_2}(n)$，使

$$\chi(n)=\chi_{q_1}(n)\chi_{q_2}(n);$$

且 $\chi(n)$ 为主(或实)特征的充要条件是 $\chi_{q_1}(n)$，$\chi_{q_2}(n)$ 均为主(或实)特征。

8. 设 $\chi(n)$ 为模 q 的非主特征，如果存在一个 $q'<q$，使对所有满足条件

$$(n_1,q)=(n_2,q)=1,\quad n_1\equiv n_2(q')$$

的 n_1，n_2 有

$$\chi(n_1)=\chi(n_2)$$

成立，则称 $\chi(n)$ 为模 q 的非原特征，反之，则称为模 q 的原特征。显然，在性质 7 中，$\chi(n)$ 为原特征的充要条件是 $\chi_{q_1}(n)$ 及 $\chi_{q_2}(n)$ 均为模 q_1 及 q_2 的原特征。

9. 若 $\chi(n)$ 为模 q 的原特征，则对任一 d，$d<q$，$d|q$，一定可找到一个整数 n_0 使

$$(n_0,q)=1,\quad n_0\equiv 1(d),\quad \chi(n_0)\neq 1 \tag{5}$$

原特征的概念是十分重要的，下面的性质刻划了原特征在特征中的地位。

10. 对模 q 的任一非主特征 $\chi(n)$，一定存在唯一的一个模 q^*，$q^*|q$，及唯一的一个模 q^* 的原特征 $\chi^*(n)$，使当 $(n,q)=1$ 时有

$$\chi(n)=\chi^*(n)$$

成立，我们称 $\chi^*(n)$ 为对应于 $\chi(n)$ 的原特征；

反之，设 $\chi^*(n)$ 为模 q^* 的原特征，q 为任一给定的正整数，$q^*|q$，则一定存在唯一的一个模 q 的非主特征 $\chi(n)$，使当 $(n,q)=1$ 时有

$$\chi^*(n)=\chi(n)$$

成立。我们称 $\chi(n)$ 为由原特征 $\chi^*(n)$ 所导出的特征。

对于以上这种非主特征与原特征之间的对应关系，我们记作

$$\chi_q \Longleftrightarrow \chi^*_{q^*}, \quad 或 \quad \chi \bmod q \Longleftrightarrow \chi^* \bmod q^*, \tag{6}$$

或简写为

$$\chi \Longleftrightarrow \chi^*, \tag{6'}$$

11. 设 $\chi_q \Longleftrightarrow \chi^*_{q^*}$，再设 q_1 是和 q^* 有相同素因子（不计重数）的 q 的最大除数，即 q_1 满足条件

$$p|q_1 \Longrightarrow p|q^*, \quad q_1|q, \quad \left(\frac{q}{q_1}, q^*\right) = 1, \tag{7}$$

（显然 $q^*|q_1$），我们有

$$\chi_q(n) = \chi_{q_1}(n)\chi^0_{q_2}(n), \tag{8}$$

其中 $q_2 = q/q_1$，（显然 $(q_1, q_2) = 1$），及

$$\chi_{q_1}(n) = \chi^*_{q^*}(n)\chi^0_{q_1}(n) = \chi^*_{q^*}(n), \tag{9}$$

因而有

$$\chi_q(n) = \chi^*_{q^*}(n)\chi^0_q(n) = \chi^*_{q^*}(n)\chi^0_{q_2}(n). \tag{10}$$

显然，若 $\chi \Longleftrightarrow \chi^*$，则一定有 $\bar{\chi} \Longleftrightarrow \bar{\chi}^*$.

12. 设 $\chi(n)$ 为模 q 的实的原特征，则一定有

$$q = 2^l p_1 \cdots p_s, \tag{11}$$

其中 $l = 0, 2, 3$，$p_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 为不同的奇素数.

附注 当 $q = 1$ 时，仅有一个主特征 $\chi(n) \equiv 1$. 有时为方便起见，我们把它看作为模 1 的原特征. 这样一来，所有的模 q 的主特征所对应的原特征就是模 1 的主特征，而模 1 的原特征所导出的模 q 的特征就是模 q 的主特征，即

$$\chi^0_q \Longleftrightarrow \chi^0_1$$

以后，我们在引用以上这些概念和性质时，一般就不再特别地加以指出了.

§2. Gauss 和

由 (1) 所定义的 Gauss 和显然具有下述简单性质:

$$G_\chi(m_1) = G_\chi(m_2), \quad m_1 \equiv m_2(q), \tag{12}$$

$$G_\chi(-m) = \chi(-1)G_\chi(m), \tag{13}$$

$$G_{\bar{\chi}}(m) = \chi(-1)G_{\chi}(m). \tag{14}$$

当 $m = 0$ 时，

$$G_{\chi}(0) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h). \tag{15}$$

这已在 § 1 性质 5 中讨论过了，由 (13) 知我们以后只要讨论 $m \geqslant 1$ 的情形.

当 $m = 1$ 时，我们记

$$G_{\chi}(1) = \tau(\chi), \tag{16}$$

即

$$\tau(\chi) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h) e\left(\frac{h}{q}\right), \tag{16'}$$

显然有

$$G_{\chi}(m) = \bar{\chi}(m)\tau(\chi), \quad (m, q) = 1, \tag{17}$$

当 $\chi = \chi^0$ 时，我们记

$$G_{\chi^0}(m) = C_q(m), \tag{18}$$

即

$$C_q(m) = \sum_{h=1}^{q}{}' e\left(\frac{mh}{q}\right). \tag{18'}$$

这就是 Ramanujan 和，其中求和号 $\sum\limits_{h=1}^{q}{}'$ 表示对模 q 的简化剩余系求和. 我们显然有

$$C_q(m) = C_q(1) = \tau(\chi^0), \quad (m, q) = 1 \tag{19}$$

引理 1 设 χ 为模 q 的特征，χ_i 为模 q_i 的特征，且满足

$$q = q_1 q_2, \quad (q_1, q_2) = 1, \quad \chi = \chi_1 \chi_2,$$

我们有

$$G_{\chi}(m) = \chi_1(q_2)\chi_2(q_1) G_{\chi_1}(m) G_{\chi_2}(m) \tag{20}$$

证 设 $h = q_2 h_1 + q_1 h_2$，我们有

$$G_{\chi}(m) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h) e\left(\frac{mh}{q}\right)$$

$$= \sum_{h_1=1}^{q_1} \sum_{h_2=1}^{q_2} \chi(q_2h_1 + q_1h_2) e\left(\frac{m(q_2h_1 + q_1h_2)}{q_1q_2}\right)$$

$$= \chi_1(q_2)\chi_2(q_1) \sum_{h_1=1}^{q_1} \chi_1(h_1) e\left(\frac{mh_1}{q_1}\right)$$

$$\times \sum_{h_2=1}^{q_2} \chi_2(h_2) e\left(\frac{mh_2}{q_2}\right),$$

由此即得(20)式，证毕.

引理 2 $C_q(m)$ 为 q 的可乘函数，且有

$$C_q(m) = \mu\left(\frac{q}{(m, q)}\right)\phi(q)\phi^{-1}\left(\frac{q}{(m, q)}\right), \tag{21}$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数.

证 由(18)式，§1 性质 7 及引理 1 立即推得 $C_q(m)$ 为 q 的可乘函数. 下面来证明(21)式. 当 $q = p^l$, $l \geqslant 1$ 时有

$$C_{p^l}(m) = \sum_{h=1}^{p^l}{}' e\left(\frac{hm}{p^l}\right) = \sum_{h=1}^{p^l} e\left(\frac{hm}{p^l}\right) - \sum_{h=1}^{p^{l-1}} e\left(\frac{hm}{p^{l-1}}\right)$$

$$= \begin{cases} p^l - p^{l-1}, & p^l \mid m; \\ -p^{l-1}, & p^{l-1} \| m; \\ 0, & p^{l-1} \nmid m. \end{cases}$$

因而我们总有

$$C_{p^l}(m) = \mu\left(\frac{p^l}{(m, p^l)}\right)\phi(p^l)\phi^{-1}\left(\frac{p^l}{(m, p^l)}\right) \tag{22}$$

成立. 由此及可乘性即得(21)式，证毕.

推论 1 我们有

$$C_q(m) = C_q(1) = \tau(\chi^0) = \mu(q), \quad (m, q) = 1. \tag{23}$$

引理 3 设 $\chi_q \Longleftrightarrow \chi^*_{q^*}$，则有

$$\tau(\chi) = \chi^*\left(\frac{q}{q^*}\right)\mu\left(\frac{q}{q^*}\right)\tau(\chi^*). \tag{24}$$

证 由§1 性质 11，引理 1 及引理 2(取 $m = 1$)可得

$$\tau(\chi_q) = \chi_{q_1}(q_2)\tau(\chi_{q_1})\mu(q_2) = \chi^*_{q^*}(q_2)\mu(q_2)\tau(\chi_{q_1}), \tag{25}$$

进而设 $h = h_1q^* + h_2$，我们有

$$\tau(\chi_{q_1}) = \sum_{h=1}^{q_1} \chi_{q_1}(h) e\left(\frac{h}{q_1}\right) = \sum_{h=1}^{q_1} \chi_{q^*}^*(h) e\left(\frac{h}{q_1}\right)$$

$$= \sum_{h_1=0}^{\frac{q_1}{q^*}-1} e\left(\frac{h_1 q^*}{q_1}\right) \sum_{h_2=1}^{q^*} \chi_{q^*}^*(h_2) e\left(\frac{h_2}{q_1}\right)$$

$$= \begin{cases} \tau(\chi_{q^*}^*), & q_1 = q^*, \\ 0, & q_1 \neq q^*. \end{cases}$$

注意到(7)式,由此及(25)式即得(24)式,证毕.

推论 我们有

$$G_{\bar{\chi}}(m) = \bar{\chi}(m)\chi^*\left(\frac{q}{q^*}\right)\mu\left(\frac{q}{q^*}\right)\tau(\chi^*), \quad (m, q) = 1. \qquad (26)$$

由引理 3 及(17)式即得(26)式.下面来讨论 $(m, q) > 1$ 的情形

引理 4 设 χ 为原特征,则当 $(m, q) > 1$ 时,有

$$G_\chi(m) = 0. \qquad (27)$$

证 设 $\lambda = (m, q)$, $m = \lambda n$, $q = \lambda d$, 所以

$$\frac{m}{q} = \frac{n}{d}, \quad (n, d) = 1$$

由于 $\lambda > 1$, 故 $d \mid q$, $d < q$. 再设 $h = dh_1 + h_2$, 有

$$G_\chi(m) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h) e\left(\frac{nh}{d}\right) = \sum_{h_2=1}^{d} e\left(\frac{nh_2}{d}\right) S(h_2), \qquad (28)$$

其中

$$S(h_2) = \sum_{h_1=0}^{\frac{q}{d}-1} \chi(dh_1 + h_2), \qquad (29)$$

显然有

$$S(h_2) = S(h_2'), \quad h_2 \equiv h_2'(d). \qquad (30)$$

我们来证明

$$S(h_2) = 0 \qquad (31)$$

由§1性质 9 知存在一个 n_0 满足(5)式. 由 $(n_0, q) = 1$ 知,当 h_1 遍历模 $\frac{q}{d}$ 的一个完全剩余系时 $n_0 h_1$ 亦遍历模 $\frac{q}{d}$ 的一个完全剩余

系，由 $n_0\equiv 1(d)$ 知，$n_0h_2\equiv h_2(d)$，再利用 (30) 式，我们可得

$$\chi(n_0)S(h_2)=\sum_{h_1=0}^{\frac{q}{d}-1}\chi(n_0dh_1+n_0h_2)=\sum_{h_1=0}^{\frac{q}{d}-1}\chi(dh_1+n_0h_2)$$

$$=\sum_{h_1=0}^{\frac{q}{d}-1}\chi(dh_1+h_2)=S(h_2).$$

由此及 $\chi(n_0)\neq 1$ 即得 (31) 式，由 (31) 及 (28) 式立即推出 (27) 式，证毕。

推论 2 对原特征 χ 总有

$$G_\chi(m)=\bar{\chi}(m)\tau(\chi) \tag{32}$$

成立。

当 $(m,q)>1$，χ 为非原特征时，有下面的引理。

引理 5 设 χ 为模 q 的非原特征，$\chi_q\Longleftrightarrow\chi^*_{q^*}$，$(m,q)>1$，则有

$$G_\chi(m)=\begin{cases}\bar{\chi}^*\left(\dfrac{m}{(m,q)}\right)\chi^*\left(\dfrac{q}{q^*(m,q)}\right)\mu\left(\dfrac{q}{q^*(m,q)}\right) & \\ \quad\times\phi(q)\phi^{-1}\left(\dfrac{q}{(m,q)}\right)\tau(\chi^*), & q^*=\dfrac{q_1}{(m,q_1)};\\ 0, & q^*\neq\dfrac{q_1}{(m,q_1)},\end{cases} \tag{33}$$

成立，其中 q_1 由 (7) 式确定。

证 由 § 1. 性质 11 及引理 1 知

$$G_\chi(m)=\chi_1(q_2)C_{q_2}(m)G_{\chi_1}(m)=\chi^*(q_2)C_{q_2}(m)G_{\chi_1}(m) \tag{34}$$

设 $\lambda=(m,q_1)$，$m=\lambda n$，$q_1=\lambda d$，所以 $(n,d)=1$。令 $h=q^*u+v$，我们有

$$G_{\chi_1}(m)=\sum_{h=1}^{q_1}\chi_1(h)e\left(\frac{mh}{q_1}\right)=\sum_{h=1}^{q_1}\chi^*(h)e\left(\frac{nh}{d}\right)$$

$$=\sum_{u=0}^{\frac{q_1}{q^*}-1}e\left(\frac{nq^*}{d}u\right)\sum_{v=1}^{q^*}\chi^*(v)e\left(\frac{nv}{d}\right). \tag{35}$$

对此我们分三种情形来讨论．并注意到，$d=\frac{q_1}{(m,q_1)}$.

(1) $d\nmid q^*$，因为 $d|q_1$, $q^*|q_1$，所以这时一定有 $q^*<q_1$，因而有

$$\sum_{n=0}^{\frac{q_1}{q^*}-1} e\left(\frac{nq^*}{d}u\right)=0,$$

故由此及 (34) 式，(35) 式得

$$G_\chi(m)=G_{\chi_1}(m)=0. \tag{36}$$

(2) $d|q^*$，但 $d\neq q^*$．这时有 $\left(\frac{q^*}{d},q^*\right)>1$，故由引理 4 知

$$\sum_{v=1}^{q^*}\chi^*(v)e\left(\frac{nv}{d}\right)=G_{\chi^*}\left(n\frac{q^*}{d}\right)=0,$$

所以由此及 (34) 式，(35) 式亦得

$$G_\chi(m)=G_{\chi_1}(m)=0. \tag{37}$$

(3) $d=q^*$，这时由 (35)、(32) 及 (7) 式得

$$\begin{aligned}G_{\chi_1}(m)&=\frac{q_1}{q^*}G_{\chi^*}(n)=\frac{q_1}{q^*}\bar{\chi}^*(n)\tau(\chi^*)\\&=\phi(q_1)\phi^{-1}(q^*)\bar{\chi}^*(n)\tau(\chi^*)\\&=\phi(q_1)\phi^{-1}\left(\frac{q_1}{(m,q_1)}\right)\bar{\chi}^*\left(\frac{m}{(m,q_1)}\right)\tau(\chi^*),\end{aligned} \tag{38}$$

利用引理 2，由 (38)、(34) 及 (7) 式推得

$$\begin{aligned}G_\chi(m)=\bar{\chi}^*\left(\frac{m}{(m,q_1)}\right)\chi^*(q_2)\mu\left(\frac{q_2}{(m,q_2)}\right)\\\times\phi(q)\phi^{-1}\left(\frac{q}{(m,q)}\right)\tau(\chi^*).\end{aligned} \tag{39}$$

再注意到这时有

$$\frac{q_2}{(m,q_2)}=\frac{q}{q^*(m,q)},\quad q_2=(m,q_2)\frac{q}{q^*(m,q)},$$

$$\frac{m}{(m,q_1)}=(m,q_2)\frac{m}{(m,q)},$$

把以上三式代入 (39) 式,即得 (33) 式的第一式。

引理证毕.

从引理 3, 4, 5 可以看出，对于 $G_\chi(m)$ 的研究已经完全归结为对 $\tau(\chi^*)$ 的研究,其中 $\chi \Longleftrightarrow \chi^*$.

引理 6 设 χ 为模 q 的原特征,则

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{q}. \tag{40}$$

证 χ 为原特征,故由 (32) 式知

$$G_\chi(m) = \bar{\chi}(m)\tau(\chi)$$

所以

$$\sum_{m=1}^{q} |G_\chi(m)|^2 = \sum_{m_1=1}^{q}\sum_{m_2=1}^{q} \chi(m_1)\bar{\chi}(m_2)|\tau(\chi)|^2$$
$$= \phi(q)|\tau(\chi)|^2,$$

但另一方面由 (1) 可得

$$\sum_{m=1}^{q} |G_\chi(m)|^2 = \sum_{h_1=1}^{q}\sum_{h_2=1}^{q} \chi(h_1)\bar{\chi}(h_2)$$
$$\times \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{m(h_1-h_2)}{q}\right) = q\phi(q).$$

由以上两式即得 (40) 式,证毕.

由引理 3 及引理 6 易得

推论 3 对任意的 $\chi \bmod q$，我们有

$$|\tau(\chi)| \leqslant \sqrt{q}.$$

下面的引理 7 (参看 [83]) 仅在第十一章 § 2 中被用到.

引理 7 设 χ_1, χ_2 分别为模 r_1, r_2 的原特征，$m \neq 0$ 为一整数,则有

$$F(\chi_1, \chi_2, m) = \sum_{\substack{q=1 \\ r_1|q,\, r_2|q}}^{\infty} \frac{1}{\phi^2(q)} \left| G_{\chi_1\chi_2\chi_q^0}(m)\tau(\bar{\chi}_1\chi_q^0)\tau(\bar{\chi}_2\chi_q^0)\right|$$
$$\leqslant c_1 \frac{|m|}{\phi(|m|)}, \tag{41}$$

其中 c_1 为一绝对常数，$c_1 \leqslant 32$.

证 显然不妨假定 $m > 0$，设 $r_3 = (r_1, r_2)$，$r_4 = [r_1, r_2]$,

$r_1 = r_3 r'_1, r_2 = r_3 r'_2$. 故有 $(r'_1, r'_2) = 1, r_4 = r_3 r'_1 r'_2$. 再设 $q = k r_4$. 由引理 3 知,

$$\tau(\chi_1 \chi_q^0) = \bar{\chi}_1\left(\frac{q}{r_1}\right)\mu\left(\frac{q}{r_1}\right)\tau(\chi_1), \tag{42}$$

$$\tau(\chi_2 \chi_q^0) = \bar{\chi}_2\left(\frac{q}{r_2}\right)\mu\left(\frac{q}{r_2}\right)\tau(\chi_2). \tag{43}$$

由以上两式可知, (41) 式的和式中不为零的项必须满足条件

$$(k, r_4) = 1, \quad \mu^2(k) = 1, \tag{44}$$

而当 $(k, r_4) = 1$ 时,由 $\chi_1\chi_2\chi_q^0 = \chi_1\chi_2\chi_k^0$ 及引理 1 知

$$G_{\chi_1\chi_2\chi_q^0}(m) = G_{\chi_1\chi_2\chi_k^0}(m) = \chi_1(k)\chi_2(k)C_k(m)G_{\chi_1\chi_2}(m) \tag{45}$$

由 (42)—(45) 及引理 6 即得

$$F(\chi_1, \chi_2, m) = |\chi_1(r'_2)\chi_2(r'_1)\mu(r'_1 r'_2)| \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\phi^2(r_4)} |G_{\chi_1\chi_2}(m)|$$

$$\times \sum_{\substack{k=1 \\ (k, r_4)=1}}^{\infty} \frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)} |C_k(m)|. \tag{46}$$

由 (46) 式容易看出,当 $(r_3, r'_1 r'_2) > 1$ 时恒有

$$F(\chi_1, \chi_2, m) = 0.$$

所以只要考虑

$$(r_3, r'_1 r'_2) = \left(r_3, \frac{r_4}{r_3}\right) = 1$$

的情形. 首先,我们来讨论 $G_{\chi_1\chi_2}(m)$. 由于 r_1, r_2 不一定互素,所以不能直接利用引理 1. 由特征的分解知,可设

$$\chi_1 = \chi_3^{(1)}\chi'_1, \quad \chi_2 = \chi_3^{(2)}\chi'_2$$

其中 χ'_1, χ'_2 分别为模 r'_1, r'_2 的原特征, $\chi_3^{(1)}, \chi_3^{(2)}$ 均为模 r_3 的原特征. 这样就有

$$\chi_1\chi_2 = \chi_3^{(1)}\chi_3^{(2)}\chi'_1\chi'_2 = \chi_3\chi'_1\chi'_2,$$

其中 $\chi_3 = \chi_3^{(1)}\chi_3^{(2)}$ 并不一定是模 r_3 的原特征, 而乘积 $\chi'_1\chi'_2$ 则是模 $r'_1 r'_2$ 的原特征. 由于 $(r_3, r'_1 r'_2) = 1$, 故利用引理 1 及 (32) 式得

$$G_{\chi_1\chi_2}(m) = G_{\chi_3\chi'_1\chi'_2}(m) = \chi_3(r'_1 r'_2)\chi'_1\chi'_2(r_3)G_{\chi_3}(m)G_{\chi'_1\chi'_2}(m)$$

$$= \chi_3(r'_1 r'_2)\chi'_1\chi'_2(r_3)\overline{\chi'_1\chi'_2}(m)G_{\chi_3}(m)\tau(\chi'_1\chi'_2). \tag{47}$$

故进一步需要讨论 $G_{\chi_3}(m)$． 设 $\chi_3 \bmod r_3 \Longleftrightarrow \chi_3^* \bmod r_3^*$，由引理5，6可推得

$$|G_{\chi_3}(m)| \leqslant \phi(r_3)\phi^{-1}\left(\frac{r_3}{(m, r_3)}\right)\sqrt{\frac{r_3}{(m, r_3)}}. \tag{48}$$

所以当 $(r_3, r_1'r_2') = 1$ 时，由 (47)，(48) 式得到

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\phi^2(r_4)}|G_{\chi_1\chi_2}(m)| &\leqslant \frac{r_1'r_2'}{\phi^2(r_1'r_2')}\frac{r_3}{\phi(r_3)}\frac{\sqrt{r_3/(m, r_3)}}{\phi(r_3/(m, r_3))} \\
&\leqslant \frac{r_1'r_2'}{\phi^2(r_1'r_2')}\sqrt{\frac{(m, r_3)}{r_3}}\prod_{p|r_3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p|\frac{r_3}{(m, r_3)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \\
&\leqslant \frac{r_1'r_2'}{\phi^2(r_1'r_2')}\sqrt{\frac{(m, r_3)}{r_3}}\prod_{p|\frac{r_3}{(m, r_3)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2} \\
&\quad \times \prod_{p|(r_3, m)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{49}$$

最后，我们来讨论 (46) 右边的和式，由 (47) 式知当 $(m, r_1'r_2') = (m, r_4/r_3) > 1$ 时恒有

$$F(\chi_1, \chi_2, m) = 0.$$

所以我们只要考虑 $(m, r_4/r_3) = 1$ 的情形．这时由引理2知

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1 \\ (k, r_4)=1}}^{\infty}\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}|C_k(m)| &= \prod_{p\nmid r_4}\left(1+\frac{|C_p(m)|}{(p-1)^2}\right) \\
&= \prod_{\substack{p\nmid r_4 \\ p\nmid m}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid r_4 \\ p|m}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) \\
&= \prod_{\substack{p\nmid r_4 \\ p\nmid m}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid r_3 \\ p|m}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).
\end{aligned} \tag{50}$$

综合以上的讨论，由 (46)，(47)，(49) 及 (50) 式可得到下面两个结论：

(1) 当 $\left(r_3, \frac{r_4}{r_3}\right) > 1$，$\mu\left(\frac{r_4}{r_3}\right) = 0$，$\left(m, \frac{r_4}{r_3}\right) > 1$ 三个条件中只要有一个成立时，就一定有

$$F(\chi_1, \chi_2, m) = 0. \tag{51}$$

(2) 当 $\left(r_3, \frac{r_4}{r_3}\right) = 1$, $\mu\left(\frac{r_4}{r_3}\right) \neq 0$ 及 $\left(m, \frac{r_4}{r_3}\right) = 1$ 成立时，必有

$$F(\chi_1, \chi_2, m) \leqslant \frac{r_1' r_2'}{\phi^2(r_1' r_2')} \sqrt{\frac{(m, r_3)}{r_3}} \prod_{p \mid \frac{r_3}{(m, r_3)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2$$

$$\times \prod_{\substack{p \mid r_4 \\ p \nmid m}} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{m}{\phi(m)}. \tag{52}$$

用粗略的估计，可以算出上式右边 $m/\phi(m)$ 前的系数不会超过 32. 这就证明了我们的引理.

对于引理 7 需要指出的一点是，当模 r_1, r_2 中有一个或全都等于 1 时，引理仍然成立. (参看 § 1 附注).

第二章　特征和估计与大筛法

本章主要是讨论下列三种型式的特征和估计:

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n), \quad \chi \neq \chi^0; \tag{1}$$

$$\sum_{\chi} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \tag{2}$$

以及

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2, \quad Q \geqslant 1, \tag{3}$$

其中求和号 $\sum_{\chi_q}^{*}$ 表示对模 q 的所有原特征求和. (1)式是最简单的特征和估计,(2) 式是对一个模 q 的经典的特征和估计,而 (3) 式是所谓大筛法型的特征和估计,它首先是由 Bombieri[4] 所引进的,为了估计这一类新的特征和,就需要利用大筛法——这是本章§3 的内容. 本章还要讨论相应于 (2)、(3) 式的一些混合型的特征和均值估计. 本章的内容在本书大多数章节中都要用到,是十分重要的.

§1. 最简单的特征和估计

设 χ 为模 q 的非主特征,由特征的性质立即推出,对任意的 M,N 有估计式

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \right| \leqslant \frac{q}{2}$$

成立. 但这结果是十分粗糙的,进一步我们要证明下面的定理.

定理 1　设 χ 为模 q 的非主特征,则对任意的整数 M 及 $N \geqslant 1$,有

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right|\leqslant 2\sqrt{q}\log q. \tag{4}$$

证 显然无妨一般，可设 $N<q$. 首先讨论 χ 为原特征的情形. 由第一章 (32) 及 (40) 式知

$$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\bar{\chi})}\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}(h)e\left(\frac{nh}{q}\right).$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right| &= \frac{1}{\sqrt{q}}\left|\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}(h)\sum_{n=M+1}^{M+N}e\left(\frac{nh}{q}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{h=1}^{q}{}'\left(\sin\frac{\pi h}{q}\right)^{-1} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{h=1}^{q-1}\left(\sin\frac{\pi h}{q}\right)^{-1},\end{aligned} \tag{5}$$

由于

$$\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi},\quad\left(|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

所以，当 q 为奇数时，

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right|\leqslant\sqrt{q}\sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}}\frac{1}{h}; \tag{6}$$

当 q 为偶数时，

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right|\leqslant\sqrt{q}\sum_{h=1}^{\frac{q}{2}-1}\frac{1}{h}+\frac{1}{\sqrt{q}}. \tag{7}$$

利用不等式

$$\frac{1}{h}\leqslant\log\frac{2h+1}{2h-1},\quad h\geqslant 1,$$

可得

$$\sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}}\frac{1}{h}\leqslant\log q,\quad q\text{ 为奇数};$$

$$\sum_{h=1}^{\frac{q}{2}-1}\frac{1}{h}\leqslant\log(q-1)\leqslant\log q-\frac{1}{q},\quad q\text{ 为偶数}.$$

把以上二式分别代入 (6) 和 (7) 式，就得

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right| \leqslant \sqrt{q}\log q, \quad \chi \text{ 为原特征.} \tag{8}$$

现在来讨论 χ 为非主非原特征的情形. 设 $\chi_q \Longleftrightarrow \chi^*_{q^*}$，由第一章 §1 性质 11 知，

$$\chi_q(n) = \chi^*_{q^*}(n)\chi^0_{q_2}(n).$$

其中 $q_2 = q/q_1$，q_1 由第一章 (7) 式确定. 所以

$$\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n) = \sum_{\substack{n=M+1\\(n,q_2)=1}}^{M+N}\chi^*(n) = \sum_{n=M+1}^{M+N}\chi^*(n)\sum_{d|(n,q_2)}\mu(d)$$

$$= \sum_{d|q_2}\mu(d)\chi^*(d)\sum_{\frac{M+1}{d}\leqslant n'\leqslant\frac{M+N}{d}}\chi^*(n')$$

由此及 (8) 式就得

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right| \leqslant \sqrt{q^*}\log q^*\sum_{d|q_2}|\mu(d)|$$

$$\leqslant 2^{\nu_1(q_2)}\sqrt{q^*}\log q^*. \tag{9}$$

其中 $\nu_1(q_2)$ 表 q_2 的不同的素因子的个数，当 $\nu_1(q_2) \geqslant 2$ 时，显然有

$$q_2 \geqslant 2\times 3\times 5^{\nu_1(q_2)-2} \geqslant 6\times 2^{2\nu_1(q_2)-4},$$

所以

$$2^{\nu_1(q_2)} \leqslant \sqrt{\frac{16}{6}}\sqrt{q_2} < 2\sqrt{q_2}.$$

由此及 (9) 式就得，当 χ 为非主非原特征时 (4) 式成立，定理证毕.

§2. 经典的特征和均值估计

定理 2 设 a_n 为任意复数，则对任意的整数 M 及 $N\geqslant 1$，我们有

$$\sum_{\chi_q}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2 \leqslant \phi(q)\left(1+\left[\frac{N-1}{q}\right]\right)\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}|a_n|^2. \tag{10}$$

证　先假定 $N \leqslant q$，我们有

$$\sum_{\chi_q}\left|\sum_{n=N+1}^{M+N} a_n\chi(n)\right|^2 = \sum_{n_1=M+1}^{M+N}\ \sum_{n_2=M+1}^{M+N} a_{n_1}\bar{a}_{n_2}\sum_{\chi}\chi(n_1)\chi(n_2)$$

$$= \phi(q)\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}|a_n|^2. \qquad (11)$$

这就证明了当 $N \leqslant q$ 时定理成立，当 $N > q$ 时，我们可把特征和

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n\chi(n)$$

分为 $1+\left[\dfrac{N-1}{q}\right]$ 个长度不超过 q 的特征和之和，再利用Schwarz不等式，从 (11) 式立即推得 (10) 式，证毕。

在进一步讨论经典的混合型（连续的和离散的）特征和均值估计之前，我们要证明二个属于 Gallagher[33] 的引理，由于有了这两个引理，使得混合型均值估计和大筛法有了一个十分简单和巧妙的形式与证明。首先，我们引进“佳位组”的定义。

定义 1　设 δ 是任一大于零的正数，若实数列 $x_i(0 \leqslant i \leqslant k)$ 满足条件

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k,\ \min_{0\leqslant i\leqslant k-1}(x_{i+1}-x_i) \geqslant \delta, \qquad (12)$$

则称数列 $x_i(0 \leqslant i \leqslant k)$ 是一个 δ 佳位组。

引理 1　设 $f(x)$ 为区间 $[x_0, x_k]$ 上的复的连续可微函数，数列 $x_i(0 \leqslant i \leqslant k)$ 是一个 δ 佳位组，则有

$$\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)|^2 \leqslant \delta^{-1}\int_{x_0}^{x_k}|f(x)|^2dx$$

$$+2\left(\int_{x_0}^{x_k}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x_0}^{x_k}|f'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

证　令

$$g_i(x) = \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_0}^{x}E_i(t)dt,\quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

其中

$$E_i(t) = \begin{cases}1, & x_i \leqslant t \leqslant x_{i+1}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

这样就有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x)(|f(x)|^2)'dx = g_i(x)|f(x)|^2\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^2 E_i(x)dx$$

$$= |f(x_{i+1})|^2 - \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^2 dx,$$

由于 $g_i(x) \leqslant 1$ 及 $x_{i+1} - x_i \geqslant \delta$，从上式即得

$$|f(x_{i+1})|^2 \leqslant \delta^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^2 dx + 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)||f'(x)|dx.$$

上式二边对 i 求和，并利用 Schwarz 不等式就推得

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{i+1})|^2 \leqslant \delta^{-1}\int_{x_0}^{x_k} |f(x)|^2 dx + 2\int_{x_0}^{x_k} |f(x)||f'(x)|dx$$

$$\leqslant \delta^{-1}\int_{x_0}^{x_k} |f(x)|^2 dx$$

$$+ 2\left(\int_{x_0}^{x_k} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x_0}^{x_k} |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

这就是 (13) 式，证毕.

这引理给出了用函数本身及其导数的积分来估计离散和的一种方法，也是大筛法的基础.

引理 2 设 $\mathscr{R}$ 为一可数的实数集合，$c(\alpha)$ 为实变量 α 的复值函数，且满足条件

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{R}} |c(\alpha)| < +\infty,$$

再设

$$S(t) = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} c(\alpha)e(\alpha t), \tag{14}$$

则有

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2 dt \leqslant \pi^2 T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |C_T(x)|^2 dx, \quad T > 0, \tag{15}$$

其中

$$C_T(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{R} \\ |\alpha - x| < \frac{1}{4T}}} c(\alpha).$$

证 令

$$F_T(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqslant \dfrac{1}{4T};\\ 2T, & |x|<\dfrac{1}{4T}.\end{cases} \tag{16}$$

则有

$$C_T(x)=\frac{1}{2T}\sum_{\alpha\in\mathscr{A}}c(\alpha)F_T(x-\alpha).$$

$C_T(x)$ 的 Fourier 变换为[1)]

$$\begin{aligned}\hat{C}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}C_T(x)e(xt)dx\\&=\frac{1}{2T}\sum_{\alpha\in\mathscr{A}}c(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}F_T(x-\alpha)e(xt)dx\\&=\frac{1}{2T}\sum_{\alpha\in\mathscr{A}}c(\alpha)e(\alpha t)\int_{-\infty}^{\infty}F_T(x)e(xt)dx\\&=\frac{1}{2T}S(t)\hat{F}_T(t),\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\hat{F}_T(t)$ 为 $F_T(x)$ 的 Fourier 变换，由 (16) 式可求得

$$\hat{F}_T(t)=\frac{\sin\frac{\pi t}{2T}}{\frac{\pi t}{2T}},$$

所以当 $|t|\leqslant T$ 时有

$$|\hat{F}_T(t)|\geqslant\frac{2}{\pi}. \tag{18}$$

应用熟知的 Fourier 变换理论的 Plancherel 定理，并利用 (17), (18) 式可推得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|C_T(x)|^2dx&=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{C}_T(t)|^2dt\\&=\frac{1}{4T^2}\int_{-\infty}^{\infty}|S(t)\hat{F}_T(t)|^2dt\end{aligned}$$

---

1) 不难验证，积分 $\int_{-\infty}^{\infty}C_T(x)e(xt)dx$ 绝对收敛，以及(17)中的积分号与求和号是可以交换的。

$$\geqslant \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T} |S(t)|^2 |\hat{F}_T(t)|^2 dt$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2 T^2}\int_{-T}^{T} |S(t)|^2 dt,$$

由此即得 (15) 式,证毕.

引理 2 使得形如(14)式的广义三角和的模的平方积分可以利用它的系数来估计，这是混合型均值估计的基础. 把定理 2 与这 2 个引理结合起来，就可证明关于经典的混合型特征和均值估计的三个定理

设有限 Dirichlet 级数

$$H(s,\chi) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) n^{-s}, \tag{19}$$

其中 $M \geqslant 0$ 及 $N \geqslant 1$ 为整数，χ 为模 q 的特征，$s = \sigma + it$. 不难看出,它是形如 (14) 式的广义三角和,只要取

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi}\log n, \quad c(\alpha) = a_n \chi(n) n^{-\sigma},$$

$$M + 1 \leqslant n \leqslant M + N.$$

定理 3 设 $H(s,\chi)$ 由 (19) 式给出,则对任意的 $T \geqslant 1$ 有

$$\int_{-T}^{T} \sum_{\chi} |H(s,\chi)|^2 dt \ll \frac{\phi(q)}{q} \sum_{\substack{n=M+1 \\ (n,q)=1}}^{M+N} (qT + n)|a_n|^2 n^{-2\sigma}. \tag{20}$$

证 对 $H(s,\chi)$ 应用引理 2 得

$$\int_{-T}^{T} |H(s,\chi)|^2 dt \leqslant \pi^2 T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\lambda^{-1}e^{-2\pi x}}^{\lambda e^{-2\pi x}} a_n \chi(n) n^{-\sigma} \right|^2 dx,$$

其中 $\lambda = e^{\frac{\pi}{2T}}$. 上式二边对 χ 求和，并交换积分号与求和号,应用定理 2 可得

$$\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |H(s,\chi)|^2 dt \leqslant \pi^2 T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\chi} \left| \sum_{\lambda^{-1}e^{-2\pi x}}^{\lambda e^{-2\pi x}} a_n \chi(n) n^{-\sigma} \right|^2 dx$$

$$\leqslant \pi^2 T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(q)\left(1+\frac{\lambda-\lambda^{-1}}{q} e^{-2\pi x}\right) \sum_{\substack{\lambda^{-1} e^{-2\pi x} \\ (n,q)=1}}^{\lambda e^{-2\pi x}} |a_n|^2 n^{-2\sigma} dx.$$

把上式右边的积分号与求和号交换即得

$$\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |H(s,\chi)|^2 dt \leqslant \pi^2 T^2 \frac{\phi(q)}{q} \sum_{\substack{n=M+1 \\ (n,q)=1}}^{M+N} |a_n|^2 n^{-2\sigma}$$

$$\times \int_{\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{n\lambda}}^{\frac{1}{2\pi}\log\frac{\lambda}{n}} [q+(\lambda-\lambda^{-1})e^{-2\pi x}]dx$$

$$\leqslant \pi^2 T^2 \frac{\phi(q)}{q} \sum_{\substack{n=M+1 \\ (n,q)=1}}^{M+N} \left[\frac{q}{2T}+\frac{n}{2\pi}(\lambda-\lambda^{-1})^2\right] |a_n|^2 n^{-2\sigma}.$$

由此式并利用

$$T(\lambda-\lambda^{-1}) \ll 1, \quad (T \geqslant 1)$$

即得 (20) 式，证毕。

附注 若 (20) 式右边的级数当 $N \to +\infty$ 时收敛，则定理当 $N=+\infty$ 时亦成立；其次，定理当 $q=1$ 时 (20) 式变为

$$\int_{-T}^{T} \left|\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n n^{-s}\right|^2 dt \ll \sum_{n=M+1}^{M+N} (T+n)|a_n|^2 n^{-2\sigma}. \qquad (20')$$

定理 3 证明的是连续的情形，下面来讨论离散的情形，首先证明一个较为简单的定理

定理 4 设 $H(s,\chi)$ 由(19)式给出，$T \geqslant 1$，再设对模 q 的每一个特征 χ，给定一串点

$$s_j = s(j,\chi) = \sigma_0 + it(j,\chi) = \sigma_0 + it_j,$$

$$-T \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_{J(\chi)} \leqslant T \qquad (21)$$

其中 σ_0 为一实常数，$J(\chi)$ 为一正整数，且对每一固定的 χ，数列 $t(j,\chi)$，$0 \leqslant j \leqslant J(\chi)$ 为一 δ 佳位组。这样，我们有

$$\sum_{\chi} \sum_{j=1}^{J(\chi)} |H(s_j,\chi)|^2 \ll \frac{\phi(q)}{q}(1+\delta^{-1})$$

$$\times \sum_{\substack{n=M+1 \\ (n,q)=1}}^{N+1} (qT+n)(\log^2 2n)|a_n|^2 n^{-2\sigma_0}. \qquad (22)$$

证　在引理 1 中取 $f(t)$ 为 $H(\sigma_0+it,\chi)$，并利用不等式 $2|ab|\leqslant|a|^2+|b|^2$，可得

$$\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(s_j,\chi)|^2\leqslant\delta^{-1}\int_{-T}^{T}|H(\sigma_0+it,\chi)|^2dt$$

$$+2\left(\int_{-T}^{T}|H(\sigma_0+it,\chi)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_{-T}^{T}|H'(\sigma_0+it,\chi)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(H\delta^{-1})\int_{-T}^{T}|H(\sigma_0+it,\chi)|^2dt$$

$$+\int_{-T}^{T}|H'(\sigma_0+it,\chi)|^2dt.$$

另一方面对函数 $H(\sigma_0+it,\chi)$ 及 $H'(\sigma_0+it,\chi)$ 分别应用定理 3 可得

$$\sum_{\chi}\int_{-T}^{T}|H(\sigma_0+it,\chi)|^2dt\ll\frac{\phi(q)}{q}\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}(qT+n)|a_n|^2n^{-2\sigma_0}$$

$$\sum_{\chi}\int_{-T}^{T}|H'(\sigma_0+it,\chi)|^2dt$$

$$\ll\frac{\phi(q)}{q}\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}(qT+n)\log^2n|a_n|^2n^{-2\sigma_0}.$$

不难看出，综合以上三式即得 (22) 式，证毕.

上述定理所考虑的点列 $s(j,\chi)$ 都位于同一直线 $\mathrm{Re}\,s=\sigma_0$ 上，现在来讨论一般的情形.

定理 5　设 $H(s,\chi)$ 由 (19) 式给出，$T\geqslant1$，再设对模 q 的每一个特征 χ，给定一串点

$$s_j=s(j,\chi)=\sigma(j,\chi)+it(j,\chi)=\sigma_j+it_j$$

$$\lambda\leqslant\sigma_j\leqslant1,\quad 0\leqslant j\leqslant J(\chi);$$

$$-T\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{J(\chi)}\leqslant T,\tag{23}$$

其中 λ 为小于 1 的常数，$J(\chi)$ 为一正整数，且对每一个固定的 χ，数列 $t(j,\chi)$，$0\leqslant j\leqslant J(\chi)$ 为

一δ佳位组，这样，我们有

$$\sum_{\chi}\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(s_j,\chi)|^2 \ll \frac{\phi(q)}{q}(1+\delta^{-1})\varepsilon^{-1}$$

$$\times \sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}(qT+n)\log^2 2n|a_n|^2 n^{-2\lambda_1}. \tag{24}$$

其中ε为任意小的正数，$\lambda_1=\lambda-\varepsilon$.

证　由于这里的$\sigma(j,\chi)$不是固定的，所以不能直接应用引理1，但由复变函数论的 Cauchy 公式知，对固定的$s=\sigma+it$，$\lambda\leqslant\sigma\leqslant1$有

$$H^2(s,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{H^2(w+it,\chi)}{w+it-s}dw,$$

其中积分环路L为由四个顶点

$$\lambda-\varepsilon\pm i\varepsilon,\quad 1+\varepsilon\pm i\varepsilon$$

所构成的矩形，这里ε为一任意小的正数. 由此即得

$$|H^2(s,\chi)|\leqslant\frac{\varepsilon^{-1}}{2\pi}\int_L|H^2(w+it,\chi)||dw|,$$

因而有

$$\sum_{\chi}\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(s_j,\chi)|^2\leqslant\frac{\varepsilon^{-1}}{2\pi}\int_L\sum_{\chi}\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(w+it_j,\chi)|^2|dw|$$

$$=\frac{\varepsilon^{-1}}{2\pi}\int_L\sum_{\chi}\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(u+i(v+t_j),\chi)|^2|dw|. \tag{25}$$

对固定的$w=u+iv$，每一个数列$v+t_j$，$0\leqslant j\leqslant J(\chi)$亦都是一个$\delta$佳位组，且当$w\in L$时有$\lambda-\varepsilon\leqslant u\leqslant1+\varepsilon$. 所以对(25)式右边的被积函数可应用定理4来估计，并得

$$\sum_{\chi}\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(u+i(v+t_j),\chi)|^2\ll\frac{\phi(q)}{q}(1+\delta^{-1})$$

$$\times\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}(qT+n)\log^2 2n|a_n|^2 n^{-2u}$$

$$\ll \frac{\phi(q)}{q}(1+\delta^{-1})\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}(qT+n)$$

$$\times \log^2 2n|a_n|^2 n^{-2\lambda_1}, \quad w\in L.$$

由此及 (25) 式即得 (24) 式，证毕.

定理 3 的附注对定理 4 及定理 5 同样适用. 在本书中并不需要应用定理 5.

§3. 大 筛 法

大筛法是近代解析数论的一个重要的基本工具. 大筛法首先是由苏联数学家 Ю. В. Линник[72] 为了研究模 p 的正的最小二次非剩余，在 1941 年提出来的. 从 1947 年开始，A. Rényi[99],[100],[101] 发表了一系列的文章对大筛法作了进一步的重要推广和发展，并应用大筛法得到了每一个充分大的偶数一定可以表为一个素数和一个素因子个数不超过 b 个的殆素数之和这一著名的结果. 以后，许多数学工作者(可参看 [3]，但不完全)都进一步研究了 Линник 的大筛法，并得到了它的许多重要应用. 1965 年，K. F. Roth[108] 和 E. Bombieri[4] 先后对大筛法作出了重要的贡献. 特别是 Bombieri 的工作，把大筛法建立在一个更合适的形式之上，因而使得大筛法有可能十分成功地应用于解析数论，并很好地改进了一系列经典解析数论问题的结果. (在本章及第三、四、八、九、十、十一章都可以看到这种应用). 后来，H. Davenport 和 H. Halberstam[25] 以及 P. X. Gallagher[33] 又进一步完善和简化了大筛法的形式和证明. 这也就是本节所要讨论的内容.

设 a_n, $M+1\leqslant n\leqslant M+N$ 为任意复数，以及

$$S(x)=\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(nx) \tag{26}$$

再设 x_i, $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $0\leqslant i\leqslant k$ 为一 δ 佳位组，大筛法就是研究和式

$$\sum_{i=1}^{k} |S(x_i)|^2 \tag{27}$$

的上界估计(见下面定理 6). 显然,大筛法应该是筛法的一种,它的名称也应该是相对于小筛法(即通常所说的筛法,见第七章)来说的. 但从表面上看来,估计和式 (2) 的上界和筛法没有明显的联系. 为了说明这一点,我们将简单地回顾一下大筛法的发展过程.

首先,我们简单地来说一下什么是筛法. 设 $\mathscr{A}$ 是一个由有限多个整数所组成的集合, $X > 2$, $\mathscr{P}$ 是一个由有限个不同的素数 $p(p \leqslant X)$ 所组成的集合. 再设对每一个素数 $p \in \mathscr{P}$, 给定模 p 的 $\lambda(p)$ 个不同的剩余类:

$$h_{p,1}, h_{p,2}, \cdots, h_{p,\lambda(p)}.$$

在集合 $\mathscr{A}$ 中筛去所有满足下述条件的元素 n:

$$n \equiv h_{p,j}(p), \quad 1 \leqslant j \leqslant \lambda(p), \quad p \in \mathscr{P}$$

把这样筛剩下来的 $\mathscr{A}$ 的子集合记作 $\mathscr{N}$, 并设其元素个数为 Z. 这就是筛法. 筛法所研究的主要问题就是估计 Z 的上界和下界. 我们按照所有的 $\lambda(p)$ 是"大"还是"小"(在某种平均意义上),就称对应的筛法为大筛法或小筛法. 例如取 $\lambda(p)=1$, $h_{p,1}=0$, 这就是我们将在第七章中加以研究的小筛法(通常亦简称为筛法).

Линник 首先考虑了这样的问题:设集合 $\mathscr{A}$ 是由整数 $M+1$, $M+2$, $\cdots$, $M+N$ 这样 N 个相邻整数组成,取 $X=N^{\frac{1}{2}}$, 而 $\mathscr{P}$ 是由

$$2 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots p_\nu \leqslant N^{\frac{1}{2}},$$

这 ν 个不同的素数组成. 设

$$\lambda = \min_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \frac{\lambda(p_i)}{p_i}$$

且满足

$$0 < \lambda < 1.$$

Линник[72] 证明了对 Z 有估计[1)]

1) 这里及以下的 ≪ 常数都是可计算的绝对常数,但我们将不去计算它们.

$$Z \ll \frac{N}{\lambda^2 y} \tag{28}$$

成立．由于这里的 $\lambda(p_i) \geqslant \lambda p_i$，所以是“大”的，因而 Линник 把他的方法叫做大筛法．

这一结果还可以用下面的等价形式来表述：设 $M+1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_Z \leqslant M+N$ 是任意选定的 Z 个整数，$\lambda(p)$ 为一正值函数，$\lambda(p) < p$，

$$\lambda = \min_{p \leqslant \sqrt{N}} \frac{\lambda(p)}{p}$$

则在所有的素数 $p \leqslant \sqrt{N}$ 中至多除了

$$\ll \frac{N}{\lambda^2 Z} \tag{29}$$

个例外素数外，对其它每一个素数 $p \leqslant \sqrt{N}$，整数 $n_1, n_2, \cdots, n_Z$ 一定分落在不少于 $p-\lambda(p)$ 个模 p 的不同的剩余类中．这一结果具有极强的普遍性，因为它表明了，在任意 N 个相邻整数中，不管我们如何任意地选取 Z 个整数，在某种意义上，对于所有的素数 $p \leqslant \sqrt{N}$ 来说（除去少数例外外）这 Z 个整数一定是“很均匀地”分布在模 p 的剩余类中．

Rényi 注意到了这一点，并把这一结果进一步精确化．他考虑了下面的和式[1)]

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} pD(p), \tag{30}$$

其中

$$D(p) = \sum_{h=0}^{p-1} \left| Z(p,h) - \frac{Z}{p} \right|^2, \quad Z(p,h) = \sum_{\substack{n=M+1 \\ n \equiv h(p)}}^{M+N} a_n, \tag{31}$$

而

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = n_i,\ 1 \leqslant i \leqslant Z \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{32}$$

1) 事实上，Rényi 考虑了更一般的且是加权的形式，参看 [100]．

显然，和式 (30) 是刻划 $n_1, n_2, \cdots n_Z$ 这 Z 个整数在所有模 $p(p\in\mathscr{P})$ 的所有的剩余类中分布状况的一种度量。Rényi[99] 先是利用 Линник 的方法证明了当

$$X \leqslant N^{2/3}Z^{-1/6}|\mathscr{P}|^{1/6}$$

时，有

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} pD(p) \ll Z^{2/3}N^{4/3}|\mathscr{P}|^{1/3}. \tag{33}$$

特别地，若取 $\mathscr{P}$ 为所有 $p\leqslant X$，则当

$$X \leqslant N^{4/5}Z^{-1/5}$$

时有

$$\sum_{p\leqslant X} pD(p) \ll Z^{2/3}N^{4/3}X^{1/3}. \tag{33'}$$

后来，他改进了这一结果，证明了[100]

$$\sum_{p\leqslant X} pD(p) \ll Z(N+X^5), \tag{34}$$

特别地，当取 $X = N^{1/5}$ 时得[1)]

$$\sum_{p\leqslant N^{1/5}} pD(p) \ll ZN. \tag{34'}$$

这样，Rényi 就把大筛法归结为对和式 (30) 的上界估计。1965 年，Roth[108] 和 Bombieri[4] 分别证明了

$$\sum_{p\leqslant N^{1/2}(\log N)^{-1/2}} pD(p) \ll ZN, \tag{35}$$

及

$$\sum_{p\leqslant N^{1/2}} pD(p) \ll ZN. \tag{36}$$

就大筛法结果本身来说，Bombieri 和 Roth 的贡献在实质上是一样的，但 Bombieri 注意到了下面的简单而又重要的关系式：

$$pD(p) = \sum_{a=1}^{p-1}\left|S\left(\frac{a}{p}\right)\right|^2, \tag{37}$$

1) 这里我们将不对所得的结果 (28), (29) 及 (33)—(36) 式之间的关系进行讨论，可参看 [37, IV, § 10] 及 [108].

其中 $S(x)$ 由 (26) 式所确定，而 a_n 则由 (32) 式所给出。

现在我们来证明一个比 (37) 式更一般的关系式

引理 3 设 a_n，$M+1\leqslant n\leqslant M+N$ 为任意复数，$S(x)$ 由 (26) 式所确定。再设

$$Z(q,h)=\sum_{\substack{n=M+1\\ n\equiv h(q)}}^{M+N} a_n,\quad Z=\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \tag{38}$$

则有

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2=\frac{1}{q}\sum_{h=1}^{q}\left|\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d}qZ\left(\frac{q}{d},h\right)\right|^2. \tag{39}$$

证 熟知，若 $f(x)$ 为一实变量的复函数，q 为一正整数，设

$$F(q)=\sum_{a=1}^{q} f\left(\frac{a}{q}\right),\quad F^*(q)=\sum_{a=1}^{q}{}' f\left(\frac{a}{q}\right)$$

则有

$$F(q)=\sum_{d\mid q}F^*(d), \tag{40}$$

及

$$F^*(q)=\sum_{d\mid q}\mu(d)F\left(\frac{q}{d}\right) \tag{41}$$

成立。现取 $f_h(x)=S(x)e(-hx)$。容易直接证明这时有

$$F_h(q)=\sum_{a=1}^{q}S\left(\frac{a}{q}\right)e\left(-h\frac{a}{q}\right)=qZ(q,h), \tag{42}$$

及

$$\sum_{h=1}^{q}|F_h^*(q)|^2=q\sum_{a=1}^{q}{}'\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2. \tag{43}$$

由 (41)、(42) 式推得

$$F_h^*(q)=\sum_{d\mid q}\mu(d)F_h\left(\frac{q}{d}\right)=\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d}qZ\left(\frac{q}{d},h\right)$$

由此及 (43) 式即得 (39) 式，引理证毕。

在 (39) 式中取 $q=p$，即得 (37) 式 Bombieri 正是从估计如下的和式(见下面定理 7)

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{a=1}^{q}{}'\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \tag{44}$$

来推出估计式(36)的．这样，Bombieri 就把大筛法归结为对和式(44)的上界估计．而和式(44)显然是和式(27)的一个特殊形式．$\left(\text{只要取 } \delta=\frac{1}{Q^2},\ x_0=0,\ x_{q,a}=\frac{a}{q},\ 1\leqslant a\leqslant q,\ (a,q)=1,\ q\leqslant Q\right)$．从以上的简单说明，我们就可以知道，为什么把大筛法归结为对于和式(27)的上界估计．

现在我们来证明大筛法的二个定理．

定理 6 设 x_i, $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $0\leqslant i\leqslant k$, 为一 δ 佳位组，则有

$$\sum_{i=1}^{k}|S(x_i)|^2\leqslant(\delta^{-1}+2\pi N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2, \tag{45}$$

其中 $S(x)$ 由(26)给出

证　首先来证明一个特殊情形．设 b_n, $-N_1\leqslant n\leqslant N_1$, 为任意复数，

$$S_1(x)=\sum_{n=-N_1}^{N_1}b_n e(nx)$$

在引理 1 中取 $f(x)=S_1(x)$，并利用

$$\int_0^1|S_1(x)|^2dx=\sum_{n=-N_1}^{N_1}|b_n|^2,$$

$$\int_0^1|S_1'(x)|^2dx=\sum_{n=-N_1}^{N_1}|2\pi n b_n|^2\leqslant 4\pi^2N_1^2\sum_{n=-N_1}^{N_1}|b_n|^2,$$

我们即得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}|S_1(x_i)|^2 &\leqslant \delta^{-1}\int_0^1|S_1(x)|^2dx\\ &\quad+2\left(\int_0^1|S_1(x)|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|S_1'(x)|^2dx\right)^{\frac12}\\ &\leqslant(\delta^{-1}+4\pi N_1)\sum_{n=-N_1}^{N_1}|b_n|^2.\end{aligned} \tag{46}$$

为了证明(45)式，我们把 N 分为奇数和偶数两种情形来讨论．

(1) N 为奇数. 我们有

$$S(x)=\sum_{n'=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_{M+1+\frac{N-1}{2}+n'} e\left(\left(M+1+\frac{N-1}{2}+n'\right)x\right)$$

$$=e\left(\left(M+1+\frac{N-1}{2}\right)x\right)S_2(x),$$

其中

$$S_2(x)=\sum_{n'=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} c_{n'}e(n'x),\quad c_{n'}=a_{M+1+\frac{N-1}{2}+n'}.$$

这样我们就有

$$\sum_{i=1}^{k}|S(x_i)|^2=\sum_{i=1}^{k}|S_2(x_i)|^2,$$

由此及 (46) 式推得 (45) 式.

(2) N 为偶数. 我们有

$$S(x)=e\left(\left(M+1+\frac{N}{2}\right)x\right)S_3(x),$$

其中

$$S_3(x)=\sum_{n'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{n'}e(n'x),\quad d_{n'}=a_{M+1+\frac{N}{2}+n'}$$

这样我们就有

$$\sum_{i=1}^{k}|S(x_i)|^2=\sum_{i=1}^{k}|S_3(x_i)|^2.$$

同样,由此及 (46) 式亦推得 (45) 式. 定理证毕.

定理 7 设 $Q\geqslant 1$, 则有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{a=1}^{q}{}'\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\leqslant(Q^2+2\pi N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,\qquad(47)$$

其中 $S(x)$ 由 (26) 式给出.

证 在定理 6 取数列 x_i 为由 $x_0=0$, 及所有的分数

$$\frac{a}{q},\quad 1\leqslant a\leqslant q,\quad (a,q)=1,\quad 1\leqslant q\leqslant Q$$

所组成。显然这些数都两两不同，且满足

$$0 < \frac{a}{q} \leqslant 1$$

由于对任意两个不同的 $\frac{a}{q}$, $\frac{a'}{q'}$ 有

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \geqslant \frac{1}{Q^2}$$

以及

$$\left|\frac{a}{q} - 0\right| \geqslant \frac{1}{Q} \geqslant \frac{1}{Q^2}$$

所以所取的数列为一 δ 佳位组，$\delta = \frac{1}{Q^2}$，这样由定理 6 直接推出 (47) 式，证毕。

§ 4. 新的特征和均值估计

在 § 2 中，我们所讨论的仅是对一个固定的模 q 的所有特征的均值估计。利用大筛法就可以对所有的模 $q(q \leqslant Q)$ 的所有的特征来讨论，并得到一类新的均值估计。

定理 8 设 $Q \geqslant 1$，a_n 为任意复数，则有

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leqslant (Q^2 + 2\pi N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2. \quad (48)$$

证　由第一章 (32) 及 (40) 式知，对模 q 的原特征 χ 有

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n) = \sum_{a=1}^{q} \bar{\chi}(a) e\left(\frac{na}{q}\right),$$

及

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$$

由以上二式及定理 2 可得

$$\frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \tau(\bar{\chi}) \chi(n) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \sum_{a=1}^{q} \bar{\chi}(a) e\left(\frac{na}{q}\right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{a=1}^{q} S\left(\frac{a}{q}\right) \chi(a) \right|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \sum_{a=1}^{q} S\left(\frac{a}{q}\right) \chi(a) \right|^2 = \sum_{a=1}^{q}{}' \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2,$$

其中

$$S\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right).$$

由此及定理 7 即得 (48) 式，证毕。

附注 如果我们直接用定理 2 的结果来估计 (48) 式左边的内层和，然后对 q 相加，这样所得到的估计将是

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right| \ll (Q^2 + QN) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

即要用 $Q^2 + QN$ 来代替 (48) 式右边的 $Q^2 + 2\pi N$，这正是利用大筛法的优越之所在。

推论 1 设 $Q \geqslant 2$，$1 < D < Q$，则有

$$\sum_{D < q \leqslant Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \ll \left(Q + \frac{N}{D}\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2. \tag{49}$$

证 设正整数 k 满足条件 $2^{k-1}D < Q \leqslant 2^k D$. 利用熟知的对数分法及定理 8，我们有

$$\sum_{D < q \leqslant Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{2^i D < q \leqslant 2^{i+1} D} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i D} \sum_{q \leqslant 2^{i+1} D} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i D} ((2^{i+1} D)^2 + 2\pi N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

$$\ll \left(Q+\frac{N}{D}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,$$

证毕.

当系数 a_n 满足一定条件时,我们有下述更一般的结果.

定理 9 设 $Q\geqslant 1$, a_n 为任意复数且满足条件: 当 n 有不大于 Q 的素因子时必有 $a_n=0$, 则有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\left|\tau(\bar{\chi})\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$

$$\leqslant (Q^2+2\pi N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2. \tag{50}$$

证 利用 $\tau(\chi)$ 的定义及 a_n 的性质,当 $q\leqslant Q$ 时,我们有

$$\tau(\bar{\chi})\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)=\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}(h)e\left(\frac{h}{q}\right).$$

$$=\sum_{\substack{n=M+1\\(n,q)=1}}^{M+N}a_n\chi(n)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}(nh)e\left(\frac{nh}{q}\right)$$

$$=\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}(h)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_ne\left(\frac{nh}{q}\right)=\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}(h)S\left(\frac{h}{q}\right).$$

所以

$$\sum_{\chi_q}\left|\tau(\bar{\chi})\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2=\phi(q)\sum_{h=1}^{q}{}'\left|S\left(\frac{h}{q}\right)\right|^2$$

由此及定理 7 即得 (50) 式,证毕.

和定理 8 一样,对定理 9 亦可有类似于 (49) 式的推论.

定理 10 在定理 9 的条件下,我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\log\frac{Q}{q}\sum_{\chi_q}{}^*\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\leqslant(Q^2+2\pi N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2. \tag{51}$$

在证明定理 10 之前,需要先证明一个引理.

引理 4 设 d 为正整数, $x\geqslant 1$. 我们有

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\(m,d)=1}}\frac{\mu^2(m)}{\phi(m)}\geqslant\frac{\phi(d)}{d}\log([x]+1). \tag{52}$$

证　我们有

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{\mu^2(m)}{\phi(m)}=\sum_{k|d}\sum_{\substack{m\leqslant x\\(m,d)=k}}\frac{\mu^2(m)}{\phi(m)}$$

$$=\sum_{k|d}\frac{\mu^2(k)}{\phi(k)}\sum_{\substack{n\leqslant x/k\\(n,d)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$$

$$\leqslant\frac{d}{\varphi(d)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,d)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}.$$

但另一方面，

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{\mu^2(m)}{\phi(m)}=\sum_{m\leqslant x}\frac{\mu^2(m)}{m}\prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)$$

$$\geqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\geqslant\int_1^{[x]+1}\frac{dt}{t}=\log([x]+1).$$

由以上二式即得 (52)，证毕。

定理 10 的证明　设 $\chi_q\Longleftrightarrow\chi_q^*$，由 a_n 的性质知，对所有的 χ_q，$q\leqslant Q$，有

$$\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)=\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_{q^*}^*,$$

再利用

$$\bar{\chi}_q=\bar{\chi}_{q^*}^*\chi_q^0$$

及第一章引理 3、6，我们可得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\left|\tau(\bar{\chi})\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$

$$=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{q^*|q}\sum_{\chi_{q^*}}{}^{*}\left|\tau(\bar{\chi}_{q^*}\chi_q^0)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_{q^*}(n)\right|^2$$

$$=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{q^*|q}q^*\sum_{\chi_{q^*}}{}^{*}\left|\chi_{q^*}\left(\frac{q}{q^*}\right)\right.$$

$$\left.\times\,\mu\left(\frac{q}{q^*}\right)\right|\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_{q^*}(n)\right|^2$$

$$= \sum_{q^*<Q} q^* \sum_{\chi_{q^*}}{}^{*} \left(\sum_{\substack{q<Q \\ q^*|q}} \frac{\left|\chi_{q^*}\left(\frac{q}{q^*}\right)\mu\left(\frac{q}{q^*}\right)\right|}{\phi(q)} \right)$$

$$\times \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_{q^*}(n) \right|^2,$$

而利用引理 4 可得

$$q^* \sum_{\substack{q<Q \\ q^*|q}} \frac{\left|\chi_{q^*}\left(\frac{q}{q^*}\right)\mu\left(\frac{q}{q^*}\right)\right|}{\phi(q)} = q^* \sum_{\substack{q<Q,\, q^*|q \\ \left(q^*,\, \frac{q}{q^*}\right)=1}} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{q^*}\right)}{\phi(q)}$$

$$= \frac{q^*}{\phi(q^*)} \sum_{\substack{r<Q/q^* \\ (r,\, q^*)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\phi(r)} \geqslant \log \frac{Q}{q^*}.$$

由以上两式及定理 9 即得 (51) 式，证毕.

如同把定理 2 和引理 2，引理 1 结合起来得到混合型的特征和均值估计定理 3、4、5 一样，我们把定理 8、定理 10 分别和引理 2，引理 1 结合起来，就可相应地得到一类新的混合型的特征和均值估计. 由于这些结果的证明过程和定理 3、4、5 完全一样，只不过是要在证明中用定理 8 或定理 10 来代替定理 2，所以我们下面将只是列出几个以后有用的定理且不加证明. 以下的 $H(s, \chi)$ 是由 (19) 式所确定的.

定理 11 设 $Q \geqslant 1$, $T \geqslant 1$, 我们有

$$\int_{-T}^{T} \sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} |H(s, \chi)|^2 dt$$

$$\ll \sum_{n=M+1}^{M+N} (Q^2 T + n) \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}. \tag{53}$$

定理 12 设 $Q \geqslant 1$，则在定理 4 的符号和条件下 (这时点列是对所有模 $q \leqslant Q$ 的每一个原特征分别给出的)，我们有

$$\sum_{q<Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \sum_{j=1}^{J(\chi)} |H(s_j, \chi)|^2$$

$$\ll (\delta^{-1}+1)\sum_{n=M+1}^{M+N}(Q^2T+n)\frac{|a_n|^2\log^2 2n}{n^{2\sigma_0}} \tag{54}$$

定理 13 设 $Q\geqslant 1$，$T\geqslant 1$，则当 a_n 满足定理 9 的条件时，我们有

$$\int_{-T}^{T}\sum_{q\leqslant Q}\log\frac{Q}{q}\sum_{\chi_q}{}^{*}|H(s,\chi)|^2dt$$

$$\ll\sum_{n=M+1}^{M+N}(Q^2T+n)\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}. \tag{55}$$

定理 14 设 $Q\geqslant 1$，a_n 满足定理 9 的条件，则在定理 4 的符号和条件下(这时点列是对所有模 $q\leqslant Q$ 的每一个原特征分别给出的)，我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\log\frac{Q}{q}\sum_{\chi_q}{}^{*}\sum_{j=1}^{J(\chi)}|H(s_j,\chi)|^2$$

$$\ll(\delta^{-1}+1)\sum_{n=M+1}^{M+N}(Q^2T+n)\frac{|a_n|^2\log^2 2n}{n^{2\sigma_0}}. \tag{56}$$

相应于定理 5 的结果由于以后不需要，所以就不写出来了。

第三章　ζ 函数与 L 函数的中值公式

大家知道，研究下面形式的 ζ 函数的中值公式

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt \ll T\log^{c_1(k)}T, \tag{1}$$

以及相应的 L 函数的中值公式

$$\sum_{\chi_q}\int_{-T}^{T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^{2k}dt \ll qT\log^{c_2(k)}(qT), \tag{2}$$

在解析数论的许多著名问题中都有极重要的意义，其中 k 为正整数，$c_1(k)$，$c_2(k)$为仅依赖于 k 的常数．1918 年 Hardy-Littlewood[40] 首先得到了著名的渐近公式

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2}dt \sim 2T\log T,$$

后来 Ingham[55] 证明了

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{4}dt \sim \frac{1}{\pi^2}T\log^4 T,$$

(以上的结果亦可参看[119])．Линник 首先证明了估计式 (2) 对 $k=1$成立．利用较为复杂的 L 函数的渐近函数方程可以证明(2)式对 $k=2$ 亦成立[52],[82]．本章的主要目的是要给出当 $k=2$ 时估计式(1)及(2)的一个简化证明，这个证明是由 Ramachandra[96],[97] 提出来的．当 $k\geqslant 3$ 时估计式 (1) 及 (2) 是否成立，是一个没有解决的问题，这个问题的解决对解析数论的贡献将是很大的．我们还将证明相应于 (1) 及 (2) 式的离散形式的中值公式，第四章中将应用这些结果．本章最后要证明一个最简单的 L 函数的另一种形式的中值公式，这个结果将在第五章中被用到．

§1. 一 些 引 理

引理 1　设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数，$a_n(a<n$

$\leqslant b$) 为任意复数，并令

$$G(x)=\sum_{a<n\leqslant x}a_n,$$

则

$$\sum_{a<n\leqslant b}a_nf(n)=G(b)f(b)-\int_a^b G(x)f'(x)dx. \tag{3}$$

证　由 Stieltjes 积分知[1]

$$\sum_{a<n\leqslant b}a_nf(n)=\int_a^b f(x)dG(x)=G(b)f(b)-\int_a^b G(x)f'(x)dx$$

证毕.

引理 2　设 $x\geqslant 2$, $r\geqslant 0$ 为整数，$d(n)$ 为除数函数，则

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{d^r(n)}{n}\ll(\log x)^{2^r}, \tag{4}$$

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}d^r(n)\ll x(\log x)^{2^r-1}. \tag{5}$$

证　先证(4)式．对 r 用归纳法．$r=0$ 时 (4) 式显然成立．设 $r=k$ 时 (4) 式成立，则当 $r=k+1$ 时有

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{d^{k+1}(n)}{n}=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{d^k(n)}{n}\sum_{m|n}1=\sum_{1\leqslant m\leqslant x}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ m|n}}\frac{d^k(n)}{n}.$$

令 $n=mt$，利用 $d(mt)\leqslant d(m)d(t)$ 及归纳假设得

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{d^{k+1}(n)}{n}&\leqslant\sum_{1\leqslant m\leqslant x}\frac{d^k(m)}{m}\sum_{1\leqslant t\leqslant x/m}\frac{d^k(t)}{t}\\&\ll\sum_{1\leqslant m\leqslant x}(\log x)^{2^k}\frac{d^k(m)}{m}\ll(\log x)^{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

这就证明了(4)式．下面来证明(5)式，亦用归纳法．$r=0$ 时 (5) 式显然成立，设 (5) 式当 $r=k$ 时成立，则当 $r=k+1$ 时，由归纳假设及 (4) 式，和上面一样可得

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}d^{k+1}(n)\leqslant\sum_{1\leqslant m\leqslant x}d^k(m)\sum_{1\leqslant t\leqslant x/m}d^k(t)$$

---

1) 这种类型的定理都可用 Abel 求和法直接证明，我们为了简单起见，本书中将都利用 Stieltjes 积分来证明．

$$\ll \sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{x}{m} (\log x)^{2^k-1} d^k(m) \ll x(\log x)^{2^{k+1}-1}.$$

这就证明了 (5) 式，引理证毕.

推论 1 设 $x \geqslant 2$, $r \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ 为整数，则当 $\lambda > 1$ 时有

$$\sum_{n > x} \frac{d^r(n)}{n^\lambda} \log^k n \ll \frac{\lambda}{\lambda - 1} x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r+k-1}, \tag{6}$$

以及当 $\lambda < 1$ 时有

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{d^r(n)}{n^\lambda} \log^k n \ll \frac{1 + |\lambda|}{1 - \lambda} x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r+k-1}. \tag{7}$$

证 在引理 1 中取 $f(x) = x^{-\lambda} \log^k x$, $a_n = d^r(n)$, $a = x$, 并令 $b \to +\infty$，则当 $\lambda > 1$ 时，由 (3) 及 (5) 式可得

$$\sum_{n > x} \frac{d^r(n)}{n^\lambda} \log^k n = -\int_x^\infty \Big(\sum_{x < n \leqslant t} d^r(n) \Big) \times \left(-\lambda \frac{\log^k t}{t^{\lambda+1}} + k \frac{\log^{k-1} t}{t^{\lambda+1}} \right) dt$$

$$\ll \lambda \int_x^\infty \frac{(\log t)^{2^r+k-1}}{t^\lambda} dt \ll \frac{\lambda}{\lambda - 1} x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r+k-1}.$$

这就证明了 (6) 式. 为证明 (7) 式只要在引理 1 中取 $a = 1$, $b = x$, $f(x)$ 及 a_n 的取法同上，则由 (3) 及 (5) 式得

$$\sum_{1 < n \leqslant x} \frac{d^r(n)}{n^\lambda} \log^k n = \frac{\log^k x}{x^\lambda} \sum_{1 < n \leqslant x} d^r(n) - \int_1^x \Big(\sum_{1 < n \leqslant t} d^r(n) \Big) \left(\frac{-\lambda \log^k t}{t^{\lambda+1}} + \frac{k \log^{k-1} t}{t^{\lambda+1}} \right) dt$$

$$\ll x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r+k-1} + |\lambda| \int_1^x t^{-\lambda} (\log t)^{2^r+k-1} dt$$

$$\ll \frac{1 + |\lambda|}{1 - \lambda} x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r+k-1}.$$

这就证明了 (7) 式，证毕.

推论 2 设 $x \geqslant 2$, $r \geqslant 0$ 为整数，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^r(n)}{n} e^{-n/x} \ll (\log x)^{2^r}, \tag{8}$$

以及当 $\lambda > 1$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^r(n)}{n^\lambda} e^{-n/x} \ll \frac{\lambda}{\lambda-1} x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r-1}, \tag{9}$$

当 $\lambda < 1$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^r(n)}{n^\lambda} e^{-n/x} \ll \frac{1+|\lambda|}{1-\lambda} x^{1-\lambda} (\log x)^{2^r-1}. \tag{10}$$

证　先证 (8) 式，由 (4) 式即得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^r(n)}{n} e^{-n/x} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{jx<n\leqslant(j+1)x} \frac{d^r(n)}{n} e^{-n/x} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j} \sum_{jx<n\leqslant(j+1)x} \frac{d^r(n)}{n} \\
&\ll \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j} (\log (j+1)x)^{2^r} \ll (\log x)^{2^r}.
\end{aligned}$$

这就证明了 (8) 式. 用同样的方法，可相应的从 (6) 式及 (7) 式 (取 $k=0$) 分别推得 (9) 式及 (10) 式. 证毕.

引理 3 (Mellin 变换) 设 $g(x)$ 为一实连续函数，$s=\sigma+it$，若 $\sigma \geqslant \sigma_0$ 时积分

$$G(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx, \tag{11}$$

绝对收敛，则当 $\sigma \geqslant \sigma_0$ 时有

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s} G(s) ds, \quad x > 0 \tag{12}$$

成立，反之亦然.

证　这实际上是 Fourier 变换的另一形式. 在 (11) 式中令 $x = e^u$，则对固定的 $\sigma \geqslant \sigma_0$ 有

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{us} g(e^u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} e^{\sigma u} g(e^u) du.$$

由 Fourier 变换知

$$e^{\sigma u} g(e^u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} G(\sigma+it) dt, \quad -\infty < u < \infty,$$

$$g(e^u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} G(s) dt.$$

由此即得 (12) 式．反过来可同样证明．引理证毕．

引理 4 设 $\sigma_0 > 0$ 为任一实数，则当 $|t| \to \infty$ 时，对 $|\sigma| \leqslant \sigma_0$ 一致地有

$$|\Gamma(\sigma + it)| \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi|t|} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} \tag{13}$$

成立．

证 参看 [118, § 4.42] 或 [60; II, § 4 定理 5]

引理 5 设 $s = \sigma + it$, Dirichlet 级数[1]

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

$\bar{\sigma}$ 为其绝对收敛横坐标，则对任意的 $x > 0$, $c > 0$ 及 $c > \bar{\sigma} - \sigma$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} e^{-n/x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w) f(s + w) x^w dw. \tag{14}$$

证 在引理 3 中取 $g(y) = e^{-y}$, 则 $G(s) = \Gamma(s)$, 故当 $c > 0$ 时有

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^{-w} \Gamma(w) dw$$

令 $y = \frac{n}{x}$, 且上式二边乘以 $a_n n^{-s}$ 即得

$$a_n n^{-s} e^{-n/x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_n n^{-(s+w)} \Gamma(w) x^w dw$$

由于 $c > \bar{\sigma} - \sigma$, 所以两边可对 n 求和并交换求和号与积分号，由此即得 (14) 式，证毕．

引理 6 设 $s = \sigma + it$, $F(s)$, $G(s)$ 均为至多在 $s = 1$ 有一个极点的半纯函数，且在任一垂直长条 $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant \sigma_2$ 中，当 $|s| \to \infty$ 时，一致地满足[2]

$$F(s) \ll |s|^{c_3}, \quad G(s) \ll |s|^{c_3}, \tag{15}$$

---

1) 有关 Dirichlet 级数的基本知识可参看 [118] 或 [81].

2) 利用 Cauchy 公式不难证明，满足条件(15)的半纯函数的各级导数亦满足类似的条件.

其中 c_3 为一依赖于 σ_1, σ_2 的常数，以及

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \sigma>1,$$

$$G(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}, \quad \sigma>1.$$

如果函数

$$\phi(s)=F(s)/G(1-s),$$

当 $|\sigma| \leqslant \frac{49}{50}$ 时解析，且一致地有

$$\phi(s) \ll (k(|s|+1))^{c_4}, \quad |\sigma| \leqslant \frac{49}{50}, \tag{16}$$

其中 c_4 为一常数，k 为一适当选取的参数[1]，使 $\ll$ 常数为一绝对常数，则对于任意的正数 A，当 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right| \leqslant 0.01$，$|t| \geqslant T>2$，$2 \leqslant x \leqslant (kT)^A$ 时，有

$$\begin{aligned}F(s)= & \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} e^{-n/x}+\phi(s) \sum_{n \leqslant x} b_n n^{s-1} \\ & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} \phi(s+w)\left(\sum_{n>x} b_n n^{w+s-1}\right) \Gamma(w) x^w d w \\ & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{4}-i\infty}^{\frac{1}{4}+i\infty} \phi(s+w)\left(\sum_{n \leqslant x} b_n n^{w+s-1}\right) \Gamma(w) x^w d w \\ & +O\left(E_1 T^{-10}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

这里

$$E_1=\begin{cases}1, & s=1 \text{ 是 } F(s) \text{ 的极点}, \\ 0, & s=1 \text{ 不是 } F(s) \text{ 的极点}.\end{cases}$$

证　由引理 5 知(取 $c=2$)，当 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right| \leqslant 0.01$ 时，

$$I=\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} F(s+w) \Gamma(w) x^w d w=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} e^{-n/x}. \tag{18}$$

1) 在应用中，函数 $F(s)$，$G(s)$ 可依赖于某一参数 k。

另一方面由引理 4 及条件 (15) 式知，我们可以把上式中的积分线路移到 $\operatorname{Re} w = -\frac{3}{4}$，且从引理的条件可得

$$
\begin{aligned}
I = & \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} F(s+w)\Gamma(w)x^w dw \\
& + F(s) + O(E_1 T^{-10}).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中 $F(s)$ 是由极点 $w = 0$ 所产生的残数，当 $z = 1$ 为 $F(z)$ 的极点时，由引理 4，(15) 式及其注知，当 $|t| \geqslant T$ 时，点 $w = 1 - s$ 所产生的残数为 $O(T^{-10})$，而当 $F(z)$ 在 $z = 1$ 解析时，就没有这一项。

当 $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0.01$，$\operatorname{Re} w = -\frac{3}{4}$ 时，

$$
-\frac{1}{4} - 0.01 \leqslant \operatorname{Re}(s+w) \leqslant -\frac{1}{4} + 0.01,
$$

所以 $\operatorname{Re}(1 - s - w) \geqslant \frac{31}{25} > 1$，故由引理条件可得

$$
\begin{aligned}
F(s+w) &= \phi(s+w) G(1-s-w) \\
&= \phi(s+w) \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{w+s-1} \\
&= \phi(s+w) \sum_{n \leqslant x} b_n n^{w+s-1} \\
&\quad + \phi(s+w) \sum_{n > x} b_n n^{w+s-1}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

由 (19)，(20) 式即得

$$
\begin{aligned}
I = & F(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} \phi(s+w)\left(\sum_{n \leqslant x} b_n n^{w+s-1}\right)\Gamma(w)x^w dw \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} \phi(s+w)\left(\sum_{n > x} b_n n^{w+s-1}\right)\Gamma(w)x^w dw \\
& + O(E_1 T^{-10}).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

由 (16) 式及引理 4 知，可以把上式中的第一个积分移至积分线路 $\operatorname{Re} w = \frac{1}{4}$，这时仅移过唯一的一个一级极点 $w = 0$，残数为

$\psi(s)\sum_{n\leqslant x} b_n n^{s-1}$，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty}\psi(s+w)\left(\sum_{n\leqslant x} b_n n^{w+s-1}\right)\Gamma(w)x^w dw$$

$$= -\psi(s)\sum_{n\leqslant x} b_n n^{s-1}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}-i\infty}^{\frac{1}{4}+i\infty}\psi(s+w)\left(\sum_{n\leqslant x} b_n n^{w+s-1}\right)\Gamma(w)x^w dw.$$

由此及 (21)，(18) 式即得 (17) 式，证毕。

引理 7 Riemann ζ 函数满足函数方程

$$\zeta(s) = A(s)\zeta(1-s),$$

其中

$$A(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

且对任意的 $\sigma_0 > 0$，当 $|\sigma| \leqslant \sigma_0$ 时一致地有

$$|A(s)| \sim \pi^{\sigma-\frac{1}{2}}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma},\quad |t| \to \infty.$$

引理 8 设整数 $q > 1$，χ 为模 q 的原特征，则 Dirichlet L 函数 $L(s,\chi)$ 满足函数方程

$$L(s,\chi) = A(s,\chi)L(1-s,\bar{\chi}),$$

其中

$$A(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\frac{\tau(\chi)}{i^{\delta}\sqrt{q}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)},$$

$$\delta = \begin{cases}0, & \chi(-1) = 1,\\ 1, & \chi(-1) = -1.\end{cases}$$

且对任意的 $\sigma_0 > 0$，当 $|\sigma| \leqslant \sigma_0$ 时一致地有

$$|A(s,\chi)| \sim \pi^{\sigma-\frac{1}{2}}|qt|^{\frac{1}{2}-\sigma},\quad |t| \to \infty.$$

引理 7 及引理 8 的证明可参看 [24]，[52]，[60]，[81]，[92] 等。

中值公式 (1) ($k=2$) 及 (2) ($k=2$) 的证明方法是完全一样的，为了简单和清楚起见，我们首先将详细地证明 (1) ($k=2$)，然后，简略地指出 (2) ($k=2$) 的证明过程，及其与 (1) 的证明的不同之处。

§2. ζ 函数的四次中值公式

定理 1 设 $T\geqslant 2$，则当 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{200\log T}$ 时，一致地有

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^4dt\ll T\log^4 T. \tag{22}$$

证 设整数 M 满足 $2\leqslant\frac{T}{2^M}<4\leqslant\frac{T}{2^{M-1}}$，则有

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^4dt=2\int_0^T|\zeta(\sigma+it)|^4dt$$

$$=2\int_0^{T/2^M}|\zeta(\sigma+it)|^4dt+2\sum_{m=1}^{M}\int_{T/2^m}^{T/2^{m-1}}|\zeta(\sigma+it)|^4dt$$

因而为了证明 (22) 式，就只要证明：当 $V\geqslant 2$，

$$\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{200\log V}$$

时，一致地有

$$\int_V^{2V}|\zeta(\sigma+it)|^4dt\ll V\log^4 V. \tag{23}$$

下面我们来证明 (23) 式。

在引理 6 中取 $F(s)=G(s)=\zeta^2(s)$，则 $\phi(s)=A^2(s)$ ($A(s)$ 见引理 7)，所以引理 6 的条件全部满足 (取参数 $k=1$)，且 $s=1$ 为 $\zeta^2(s)$ 的 2 级极点及

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-s},\quad \operatorname{Re}s>1$$

故由引理 6 知，当 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{200\log V}<0.01$，$|t|\geqslant V$，$2\leqslant x$

$\leqslant V$ 时有

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) n^{-s} e^{-n/x} + A^2(s) \sum_{n \leqslant x} d(n) n^{s-1}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} A^2(s+w) \left(\sum_{n>x} d(n) n^{w+s-1} \right) \Gamma(w) x^w dw$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{4}-i\infty}^{\frac{1}{4}+i\infty} A^2(s+w) \left(\sum_{n \leqslant x} d(n) n^{w+s-1} \right) \Gamma(w) x^w dw$$

$$+ O(V^{-10}) = \sum_{k=1}^{4} J_k(s) + O(V^{-10}). \tag{24}$$

故得

$$\int_V^{2V} |\zeta(\sigma + it)|^4 dt \ll \sum_{k=1}^{4} \int_V^{2V} |J_k(\sigma + it)|^2 dt + O(V^{-19}). \tag{25}$$

现取 $x = V$，下面来估计 (25) 式右边的四个积分.

由第 2 章定理 3 (取 $q = 1$)，及引理 2 推论 2 得

$$\int_V^{2V} |J_1(\sigma + it)|^2 dt = \int_V^{2V} \left| \sum_{n=1}^{\infty} d(n) n^{-s} e^{-n/V} \right|^2 dt$$

$$\ll \sum_{n=1}^{\infty} (V + n) \frac{d^2(n)}{n^{2\sigma}} e^{-2n/V} \ll V \log^4 V. \tag{26}$$

由引理 7 知，当 $\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{200 \log V}$ 时，

$$A^2(\sigma + it) \ll 1, \quad |t| \leqslant 2V.$$

故同样由第 2 章定理 3 (取 $q = 1$)，及引理 2 得

$$\int_V^{2V} |J_2(\sigma + it)|^2 dt = \int_V^{2V} \left| \sum_{n \leqslant V} \frac{d(n)}{n^s} \right|^2 dt$$

$$\ll \sum_{n \leqslant V} (V + n) \frac{d^2(n)}{n} \ll V \log^4 V. \tag{27}$$

由引理 4 及引理 7 知，当 $\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{200 \log V}$ 时，可利用 Schwarz 不等式得到 ($s = \sigma + it$, $w = u + iv$)

$$|J_3(\sigma + it)|^2 \leqslant \int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} |\Gamma(w)| dv \int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} |A(s+w)|^4$$

$$\times \left|\sum_{n>V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2 |\Gamma(w)| V^{-\frac{3}{2}} dv$$

$$\ll V^{-\frac{3}{2}} \Bigg[\int_{\substack{u=-3/4\\|v|\leqslant V/2}} |A(s+w)|^4 \left|\sum_{n>V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2 |\Gamma(w)| dv$$

$$+ \int_{\substack{u=-3/4\\|v|>V/2}} |A(s+w)|^4 \left|\sum_{n>V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2 |\Gamma(w)| dv\Bigg]$$

$$\ll V^{\frac{3}{2}} \int_{\substack{u=-3/4\\|v|\leqslant V/2}} \left|\sum_{n>V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2 |\Gamma(w)| dv + O(V^{-10}). \quad (28)$$

同理可得，当 $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{200 \log V}$ 时，

$$|J_4(\sigma+it)|^2 \ll V^{-\frac{1}{2}} \int_{\substack{u=1/4\\|v|\leqslant V/2}} \left|\sum_{n\leqslant V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2$$

$$\times |\Gamma(w)| dv + O(V^{-10}). \quad (29)$$

应用第二章定理 3 (取 $q=1$，$M=[V]$，$N\to\infty$)，及引理 2 推论 1，由 (28) 式可得　当 $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{200 \log V}$ 时有

$$\int_V^{2V} |J_3(\sigma+it)|^2 dt \ll V^{\frac{3}{2}} \int_{\substack{u=-3/4\\|v|\leqslant V/2}} |\Gamma(w)| dv$$

$$\times \int_V^{2V} \left|\sum_{n>V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2 dt + O(V^{-9})$$

$$\ll V^{\frac{3}{2}} \sum_{n>V} (V+n) d^2(n) n^{2\sigma-7/2} \ll V \log^3 V. \quad (30)$$

同理由 (29) 式可得，当 $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{200 \log V}$ 时，

$$\int_V^{2V} |J_4(\sigma+it)|^2 dt \ll V^{-\frac{1}{2}} \int_{\substack{u=1/4\\|v|\leqslant V/2}} |\Gamma(w)| dw$$

$$\times \int_V^{2V} \left|\sum_{n\leqslant V} d(n)n^{w+s-1}\right|^2 dv + O(V^{-9})$$

$$\ll V^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\leqslant V} (V+n) d^2(n) n^{2\sigma-\frac{3}{2}} \ll V \log^3 V. \quad (31)$$

由 (25)，(26)，(27)，(30) 及 (31) 式即得 (23) 式，定理证毕.

定理 2 设 $T \geqslant 2$, $s=\sigma+it$, $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{400\log T}$, 我们有

$$\int_{-T}^{T}|\zeta'(\sigma+it)|^4 dt \ll T\log^8 T. \tag{32}$$

证 显然和定理 1 一样,只要证明,当 $V \geqslant 2$,

$$\left|\sigma-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{400\log V}$$

时有

$$\int_{V}^{2V}|\zeta'(\sigma+it)|^4 dt \ll V\log^8 V. \tag{33}$$

设 Q 是以 $s=\sigma+it$ 为圆心, $1/400\log V$ 为半径的圆周,由 Cauchy 公式得

$$\zeta'(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_Q \frac{\zeta(w)}{(w-s)^2}dw$$

利用 Schwarz 不等式即得

$$\begin{aligned}|\zeta'(s)|^4 &\ll \left(\int_Q \frac{1}{|w-s|^{8/3}}|dw|\right)^3\left(\int_Q |\zeta(w)|^4|dw|\right)\\ &\ll \log^5 V\int_Q|\zeta(w)|^4|dw|\\ &= \log^5 V\int_{|z|=1/400\log V}|\zeta(s+z)|^4|dz|.\end{aligned}$$

由此及 (23) 式得

$$\begin{aligned}\int_V^{2V}|\zeta'(\sigma+it)|^4 dt &\ll \log^5 V\\ &\times\int_{|z|=1/400\log V}\left(\int_V^{2V}|\zeta(s+z)|^4 dt\right)|dz|\\ &\ll V\log^8 V.\end{aligned}$$

这就证明了 (33) 式,定理证毕.

把定理 1, 2 及第二章引理 1 结合起来,就可得到下面的离散型中值公式

定理 3 设 $T \geqslant 2$, $\delta > 0$ 以及 t_r, $|t_r| \leqslant T$, $0 \leqslant r \leqslant R$, 是

一个 δ 佳位组，则有

$$\sum_{r=1}^{R}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_r\right)\right|^4 \ll (\delta^{-1}+\log T)T\log^4 T. \tag{34}$$

证　在第二章引理 1 中取

$$f(t)=\zeta^2\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

并利用 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{R}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_r\right)\right|^4 &\ll \delta^{-1}\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt\\&\quad+4\left(\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\times\left(\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&\ll \delta^{-1}\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt\\&\quad+\left(\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{-T}^{T}\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

由此及定理 1，2 即得 (34) 式，证毕。

§3. L 函数的四次中值公式

定理 4　设 $T\geqslant 2$，整数 $q>1$，则当 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{200\log qT}$ 时有

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it,\chi)|^4 dt \ll \phi(q)T\log^4 qT. \tag{35}$$

证　证明的方法和定理 1 完全相同，主要差别在于这里和模 q 有关．设整数M满足 $2\leqslant\frac{T}{2^M}<4\leqslant\frac{T}{2^{M-1}}$，我们有

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it,\chi)|^4 dt$$

$$= 2 \sum_{\chi_q}{}^* \int_0^{T/2^M} |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{M} \sum_{\chi_q}{}^* \int_{T/2^m}^{T/2^{m-1}} |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt. \qquad (36)$$

由此显见，为了证明 (35) 式只要证明：当 $V > 2$，

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{200 \log qV}$$

时有

$$\sum_{\chi_q}{}^* \int_V^{2V} |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt \ll \phi(q) V \log^4 qV; \qquad (37)$$

以及

$$\sum_{\chi_q}{}^* \int_0^4 |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt \ll \phi(q) \log^4 q. \qquad (38)$$

在定理 1 中相应于 (38) 式的是

$$\int_0^4 |\zeta(\sigma + it)|^4 dt \ll 1.$$

而这是显然成立的，但在这里 (38) 和 (37) 式一样，都需要加以证明，二者的证明是一样的，且 (38) 式的证明要稍为简单一些。

现在引理 6 中取 $F(s) = L^2(s, \chi)$，$G(s) = L(s, \bar{\chi})$ 它们均是全平面上的解析函数，且

$$L^2(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) d(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

这时

$$\psi(s) = \psi(s, \chi) = A^2(s, \chi),$$

其中 $A(s, \chi)$ 是引理 8 中的函数，再取引理 6 中的参数 $k = q$。这样引理 6 的条件全部满足，所以有（这时无极点，$E_1 = 0$），

$$L^2(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) d(n) n^{-s} e^{-n/x} + A^2(s, \chi) \sum_{n \leqslant x} \bar{\chi}(n) d(n) n^{s-1}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4} - i\infty}^{-\frac{3}{4} + i\infty} A^2(s + w, \chi)$$

$$\times \left(\sum_{n > x} \bar{\chi}(n) d(n) n^{w+s-1} \right) \Gamma(w) x^w dw$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}-i\infty}^{\frac{1}{4}+i\infty} A^2(s+w,\chi)$$

$$\times\left(\sum_{n\leqslant x}\bar{\chi}(n)d(n)n^{w+s-1}\right)\Gamma(w)x^w dw$$

$$= \sum_{k=1}^{4} J_k(s,\chi). \tag{39}$$

在证明(37)式时，我们将取(39)式中的 $x=qV$，在证明(38)式时，我们将取(39)式中的 $x=q$，证明的过程和定理 1 的(25)—(31) 式完全相同，要注意的是仅在于凡是定理 1 中用引理 7 来估计 $A(s)$ 的地方，这里要改用引理 8 来估计 $A(s,\chi)$. 我们这里就不再重复地写出来了. (事实上对 (38) 式的证明可稍简单些，即在估计对应的 $|J_3(s,\chi)|^2$ 及 $|J_4(s,\chi)|^2$ 时，不用象对应的 (28)，(29) 式一样把对 v 的积分分为 $|v|\leqslant\frac{V}{2}$ 及 $|v|>\frac{V}{2}$ 二部分).

与利用定理 1 证明定理 2 的方法完全一样，利用定理 4 同样可以证明.

定理 5 设 $T\geqslant 2$，整数 $q>1$，则当 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{400\log qT}$ 时有

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L'(\sigma+it,\chi)|^4 dt \ll \phi(q)T\log^8 qT. \tag{40}$$

同样，把定理 4，5 及第二章引理 1 结合起来，我们可以得到相应的离散型中值公式.

定理 6 设 $T\geqslant 2$，整数 $q>1$ 及 $\delta>0$. 再设对每一 χ 给出数列 $t_r=t_r(\chi)$，$|t_r(\chi)|\leqslant T$，$0\leqslant r\leqslant R(\chi)$，且每一数列 $t_r(\chi)$，$0\leqslant r\leqslant R(\chi)$，都是 δ 佳位组，则有

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\sum_{r=1}^{R(\chi)}\left|L\left(\frac{1}{2}+it_r,\chi\right)\right|^4 \ll (\delta^{-1}+\log qT)\phi(q)T\log^4 qT \tag{41}$$

以上的定理只是对原特征求和，为了把定理 4，5，6 推广到对模 q 的全体特征求和的情形，我们需要证明下面的引理.

引理 9 设 $\lambda > \frac{1}{4}$，θ 为任一正常数，则有

$$\sum_{d \mid q} \phi(d) \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid d}} \left(1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right) \ll_{\theta} q \log q. \tag{42}$$

证 若 $\mu(q) \neq 0$，则

$$\sum_{d \mid q} \phi(d) \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid d}} \left(1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right) = \prod_{p \mid q} \left(\phi(p) + 1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right)$$

$$= \prod_{p \mid q} \left(p + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right) \ll_{\theta} q.$$

若 $\mu(q)=0$，设 q_1 和 q 有相同素因子且 $\mu(q_1) \neq 0$，并令 $q=q_1q_2$. 再设 $d = d_1d_2$，$d_1 = (d, q_1)$. 这样有

$$\sum_{d \mid q} \phi(d) \sum_{\substack{p \mid q \\ p \nmid d}} \left(1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right) = \sum_{\substack{d_1 \mid q_1,\, d_2 \mid q_2 \\ (d_2,\, q_1/d_1)=1}} d_2 \phi(d_1) \prod_{\substack{p \mid q_1 \\ p \nmid d_1}} \left(1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right)$$

$$= \sum_{d_1 \mid q_1} \phi(d_1) \prod_{\substack{p \mid q_1 \\ p \nmid d_1}} \left(1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right) \sum_{\substack{d_2 \mid q_2 \\ (d_2,\, q_1/d_1)=1}} d_2$$

$$\leqslant \sum_{d_1 \mid q_1} \phi(d_1) \prod_{\substack{p \mid q_1 \\ p \nmid d_1}} \left(1 + \frac{\theta}{p^{\lambda}}\right) \sum_{d_2 \mid q_2} d_2$$

$$\ll_{\theta} q_1 q_2 \log q_2 \leqslant q \log q.$$

由以上二式即得 (42). 证毕.

定理 7 在定理 4 的条件下，我们有

$$\sum_{\chi_q} \int_{-T}^{T} |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt \ll qT \log^5 qT, \tag{43}$$

$$\sum_{\chi_q} \int_{-T}^{T} |L'(\sigma + it, \chi)|^4 dt \ll qT \log^9 qT. \tag{44}$$

以及在定理 6 的条件下，我们有

$$\sum_{\chi_q} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| L\left(\frac{1}{2} + it_r, \chi\right)\right|^4 \ll (\delta^{-1} + \log qT) qT \log^5 qT. \tag{45}$$

证 以上三个估计式是一样的，我们仅以 (43) 为例，证明如下. 设 $\chi_q \Longleftrightarrow \chi^*_{q^*}$，我们有

$$L(s, \chi_q) = L(s, \chi^*_{q^*}) \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid q^*}} \left(1 - \frac{\chi^*_{q^*}(p)}{p^s}\right).$$

所以由定理 1，3，引理 9 可得 ($q^* = 1$ 时要用定理 1)

$$\sum_{\chi_q} \int_{-T}^{T} |L(\sigma + it, \chi)|^4 dt = \sum_{q^* \mid q} \sum_{\chi_{q^*}}{}^*$$

$$\times \int_{-T}^{T} |L(\sigma + it, \chi_{q^*})|^4 \left| \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid q^*}} \left(1 - \frac{\chi_{q^*}(p)}{p^s}\right)\right|^4 dt$$

$$\leqslant \sum_{q^* \mid q} \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid q^*}} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right)^4 \sum_{\chi_{q^*}}{}^* \int_{-T}^{T} |L(\sigma + it, \chi_{q^*})|^4 dt$$

$$\leqslant \sum_{q^* \mid q} \phi(q^*) \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid q^*}} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right)^4 T \log^4 q^* T \ll qT \log^5 qT.$$

这就证明了 (43)式。(44)，(45) 式同样证明之。

§4. L 函数的二次中值公式

定理 8[9] 设整数 $q > 2$，$s = \frac{1}{2} + it$，则有

$$\sum_{\chi_q \neq \chi_q^0} |L(s, \chi)|^2 \ll \phi(q)|s|\log^2 q|s|, \tag{46}$$

$$\sum_{\chi_q \neq \chi_q^0} |L'(s, \chi)|^2 \ll \phi(q)|s|\log^4 q|s|. \tag{47}$$

证 若 $\chi \neq \chi^0$，取 $H = q|s|$，并令

$$F(x) = \sum_{H < n \leqslant x} \chi(n)$$

则由第二章定理 1 知

$$F(x) \ll \sqrt{q} \log q.$$

当 $\chi \neq \chi^0$ 时，

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant H} \chi(n) n^{-s} + \sum_{n > H} \chi(n) n^{-s},$$

应用引理1得

$$\sum_{n>H}\chi(n)n^{-s}=\int_H^{\infty}x^{-s}dF(x)=s\int_H^{\infty}x^{-s-1}F(x)dx$$
$$\ll|s|\sqrt{q}\log q\int_H^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx\ll\sqrt{|s|}\log q.$$

由以上二式即得：当 $\chi\neq\chi^0$，$s=\frac{1}{2}+it$时 有

$$L^2(s,\chi)\ll\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant H}\chi(n)n^{-s}\right|^2+|s|\log^2q.$$

由此并应用第二章定理2可得

$$\sum_{\chi\neq\chi^0}|L^2(s,\chi)|\ll\sum_{\chi\neq\chi^0}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant H}\chi(n)n^{-s}\right|^2+\phi(q)|s|\log^2q$$
$$\ll\phi(q)\left(1+\frac{H}{q}\right)\sum_{1\leqslant n\leqslant H}\frac{1}{n}+\phi(q)|s|\log^2q$$
$$\ll\phi(q)|s|\log^2q|s|.$$

这就证明了(46)式．完全同样地可证明(47)式，只要利用，当 $\chi\neq\chi_0$，$s=\frac{1}{2}+it$ 时有

$$L'(s,\chi)=-\sum_{1\leqslant n\leqslant H}\chi(n)n^{-s}\log n-\sum_{n>H}\chi(n)n^{-s}\log n,$$

以及

$$\sum_{n>H}\chi(n)n^{-s}\log n=\int_H^{\infty}x^{-s}\log x\,dF(x)$$
$$=-\int_H^{\infty}(-sx^{-s-1}\log x+x^{-s-1})F(x)dx$$
$$\ll\sqrt{|s|}\log^2q|s|.$$

证毕.

如果注意到

$$L(s,\chi^0)=\zeta(s)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

那末利用 $\zeta(s)$ 及 $\zeta'(s)$ 当 $s=\frac{1}{2}+it$ 时的熟知的最简单估计，由(46)，(47)式立即可推得下面的估计式是成立的.

$$\sum_{\chi_q} |L(s,\chi)|^2 \ll \phi(q)|s|\log^2 q|s|, \quad s = \frac{1}{2} + it, \tag{48}$$

$$\sum_{\chi_q} |L'(s,\chi)|^2 \ll \phi(q)|s|\log^4 q|s|, \quad s = \frac{1}{2} + it. \tag{49}$$

定理 8 的证明是十分初等的，但基于它，我们将在第五章给出一个关于素数变数三角和估计的简单的分析证明，所以它是十分有用的．同样我们可以讨论这种类型的高次中值估计，即

$$\sum_{\chi_q} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^{2k} \ll \phi(q)|s|\log^{c(k)} q|s|,$$

$$k \geqslant 2, \quad s = \frac{1}{2} + it.$$

Линник[78] 首先解决了 $k = 2$ 的情形，但证明方法是极其复杂的，当 $k \geqslant 3$ 时，亦是一个没有解决的问题．

第四章　零点分布(一)

ζ 函数与 L 函数的零点的研究在解析数论中占有最重要的地位. 解析数论的基础知识实际上就是 ζ 函数与 L 函数的零点的最基本的性质. 1859 年 Riemann 在其著名的论文[204] (亦可参看 [50]) 中提出了这样的猜测: $\zeta(s)$ 的所有非显明零点都位于直线 $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上. 这就是著名的 Riemann 假设,简记作 RH. 虽然大量的数值计算及理论上的探讨都支持这一假设, 但它和 Goldbach 猜想一样至今还没有被证明或被否定. 人们同样还猜测所有 $L(s,\chi)$ 的非显明零点亦都位于直线 $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上, 这就是通常所说的广义 Riemann 假设,简记作 GRH. 有时我们还提出所谓弱型(弱型广义) Riemann 假设, 即设正数 δ, $\frac{1}{2}\leqslant\delta<1$, $\zeta(s)(L(s,\chi))$ 的所有零点的实部都不超过 δ, 简记作 $R_\delta H(GR_\delta H)$.

大家知道, 从 RH 及 GRH (或 $R_\delta H$ 及 $GR_\delta H$) 可推出一系列重要的解析数论的结果, 虽然这都是一些假设性的结果, 但却指出了研究 ζ 函数与 L 函数零点的重要意义及研究方向. 许多数学工作者从各个角度去研究零点的性质, 得到了十分丰富的结果和重要的应用. 不过, 总的来说我们至今对于零点的深刻的性质知道得仍然不多. 这一章及第十章将讨论和研究与 Goldbach 猜想有关的 ζ 函数及 L 函数零点分布的一些结果.

本章将讨论所谓零点密度估计. Ю. В. Линник 在这方面作出了重要贡献, 他首先利用 L 函数零点密度估计给出了三素数定理的一个新的分析证明[74], [75], [76]. 设 $T\geqslant 2$, $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$, 我们用

$$N(\alpha,T) \tag{1}$$

表示 $\zeta(s)$ 在矩形

$$\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T \tag{2}$$

中的零点个数. 再设整数 $q \geqslant 1$, $\chi \bmod q$, 我们用

$$N(\alpha, T, \chi) \tag{3}$$

表示 $L(s, \chi)$ 在矩形 (2) 中的零点个数, 并设

$$N(\alpha, T, q) = \sum_{\chi} N(\alpha, T, \chi), \tag{4}$$

及

$$N^*(\alpha, T, q) = \sum_{\chi_q}{}^{*} N(\alpha, T, \chi). \tag{5}$$

显然

$$N(\alpha, T) = N(\alpha, T, 1). \tag{6}$$

本章所讨论的零点密度估计问题就是研究下面形式的估计式[1)]

$$N(\alpha, T, q) \ll (qT)^{A_1(\alpha)(1-\alpha)} \log^{B_1}(qT), \tag{7}$$

及

$$\sum_{q \leqslant Q} N^*(\alpha, T, q) \ll (Q^2 T)^{A_2(\alpha)(1-\alpha)} \log^{B_2} qT, \tag{8}$$

其中 $Q \geqslant 3$, 在取什么样的 $A_i(\alpha)$, $B_i(i = 1, 2)$ 时成立. 第二种形式的估计称为大筛法型的零点密度估计, 它首先是由 Bombieri[4] 提出来的. 人们猜测当 $A_1(\alpha) = A_2(\alpha) = 2$ 时, (7) 及 (8) 式成立, 这就是所谓密度假设, 简记作 DH, 这同样亦是一个没有解决的猜测, 这一问题的解决将对解析数论有重要的贡献. 本章将证明(见下面定理 1, 2), 当

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha) = \frac{3}{2 - \alpha}$$

时 (7) 及 (8) 式成立 (对数方次 B_1, B_2 是不重要的). 这一结果本质上是属于 Ingham[56], [57] 的. 本章最后要证明(见下面定理 4) 对于 ζ 函数当 α 充分靠近 1 时 DH 成立, 具体的说, 我们证明了当

---

1) 当然还可以有其它的形式, 如可以考虑 q (或 Q) 和 T 有不同的指数, 或去掉对数因子而在 qT (或 Q^2T) 的指数上加一任意小的正数 $\varepsilon > 0$ 等等.

$\frac{11}{12} \leqslant \alpha < 1$ 时可取

$$A_1(\alpha) = \frac{5}{3} \frac{1}{(2\alpha - 1)}$$

使 (7) ($q = 1$) 成立.

近十几年来,关于零点密度估计有很多工作,改进了研究零点密度估计的方法并对估计的结果作了各种形式的局部改进. 例如 Montgomery[82] 证明了可取

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha) = \frac{5}{2},$$

Huxley[53] 更进一步证明了可取

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha) = \frac{12}{5},$$

这是至今最好的结果. 同样 Huxley[52],[54] 也得到了比定理 4 更好的结果. 我们这里所证明的结果虽然并不是最好的,但在一些应用中是完全足够了.

§1. ζ 函数与 L 函数的零点密度估计

引理 1 设 T_0 为任一实数,整数 $q \geqslant 1$, 以 N_0 表示函数 $L(s, \chi)$, $\chi \bmod q$ 在矩形 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $T_0 \leqslant t_0 \leqslant T_0 + 1$ 中的零点个数,则

$$N_0 \leqslant C_1 \log q(|T_0| + 2). \tag{9}$$

证明见 [24], [60], 或 [92].

现设 $T \geqslant 2$, 整数 $q \geqslant 1$, 及 x, y 为满足条件

$$1 \leqslant x \leqslant (qT)^A, \quad 1 \leqslant y \leqslant (qT)^A \tag{10}$$

的常数,其中 A 为任一固定的常数. 再设

$$M_x(s, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)\chi(n)n^{-s}, \tag{11}$$

$$F_x(s, \chi) = 1 - L(s, \chi)M_x(s, \chi), \tag{12}$$

其中 χ 为模 q 的特征. 我们有

引理 2 设 $\mathscr{L}=\log qT$, $\frac{1}{2}+\mathscr{L}^{-1}\leqslant\alpha<1$, 若 $\rho=\beta+i\gamma$ 为 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\alpha\leqslant\sigma\leqslant1,\quad 3E_0\mathscr{L}<|t|\leqslant T \tag{13}$$

中的一个零点，其中

$$E_0=\begin{cases}1, & \chi=\chi^0,\\ 0, & \chi\neq\chi^0,\end{cases}$$

则对充分大的 $\mathscr{L}$ 有

$$1\ll\mathscr{L}\left[y^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_{\gamma-\mathscr{L}}^{\gamma+\mathscr{L}}\left|F_x\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+y^{1-\alpha}\int_{\gamma-\mathscr{L}}^{\gamma+\mathscr{L}}|F_x(1+\mathscr{L}^{-1}+it,\chi)|dt\right]. \tag{14}$$

证 考虑函数

$$G(s,\chi)=y^{s-\rho}e^{(s-\rho)^2}F_x(s,\chi)$$

显有

$$G(\rho,\chi)=F_x(\rho,\chi)=1.$$

设 Q 为以 $\frac{1}{2}+i(\gamma\pm\mathscr{L})$, $1+\mathscr{L}^{-1}+i(\gamma\pm\mathscr{L})$ 为顶点的矩形。易知 $G(s,\chi)$ 为 Q 内及其上的解析函数(对 $G(s,\chi^0)$, 由于 $E_0=1$ 而保证了这一点，且 $|\gamma\pm\mathscr{L}|\geqslant2\mathscr{L}$), 故由 Cauchy 公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_Q\frac{G(s,\chi)}{s-\rho}ds=1. \tag{15}$$

由熟知的最简单的估计

$$|L(s,\chi)|\ll q(|t|+1),\quad \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant1,\quad |t|\geqslant E_0,$$

及 x, y 所满足的条件 (10) 容易看出，当 $\mathscr{L}$ 充分大时在矩形 Q 的上下两个底边上有

$$\begin{aligned}&G(\sigma\pm i(\gamma\pm\mathscr{L}),\chi)\\&\quad=y^{(\sigma-\beta)\pm i\mathscr{L}}e^{(\sigma-\beta\pm i\mathscr{L})^2}F_x(\sigma+i(\gamma\pm\mathscr{L}),\chi).\\&\qquad\ll(qT)^{c_1}e^{-\mathscr{L}^2}\ll(qT)^{-\frac{1}{2}\mathscr{L}}.\end{aligned}$$

由此及 (15) 即得，当 $\mathscr{L}$ 充分大时有

$$1 \ll \mathscr{L} \int_{\gamma-\mathscr{L}}^{\gamma+\mathscr{L}} y^{\frac{1}{2}-\beta} e^{-(t-\gamma)^2+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)^2} \left| F_\chi\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| dt$$

$$+ \mathscr{L} \int_{\gamma-\mathscr{L}}^{\gamma+\mathscr{L}} y^{1-\beta} e^{-(t-\gamma)^2+(1+\mathscr{L}^{-1}-\beta)^2} \left| F_\chi(1+\mathscr{L}^{-1}+it, \chi) \right| dt.$$

由此立即推出 (14) 式，引理证毕.（本引理可参看 [36]）

定理 1 设 $T \geqslant 2$，整数 $q \geqslant 1$，则当 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ 时有

$$N(\alpha, T, q) \ll (qT)^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}} \log^9 qT. \tag{16}$$

证 设 $\mathscr{L} = \log qT$，由于有熟知的估计

$$N\left(\frac{1}{2}, T, q\right) \ll qT \log qT,$$

所以我们只要对 $\alpha \geqslant \frac{1}{2} + \mathscr{L}^{-1}$ 及 $\mathscr{L}$ 充分大来证明 (16) 即可.

设区域 D 为 $\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1$，$|t| \leqslant T$. 现把 D 分为如下的一组小矩形 Q_m 之和：

$$Q_m:\quad \alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad 3m\mathscr{L} < t \leqslant 3(m+1)\mathscr{L},$$
$$-\left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right] \leqslant m \leqslant \left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right]\mathscr{L} - 1,$$

及

$$Q_{-\left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right]-1}:\quad \alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad -T \leqslant t \leqslant -3\left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right]\mathscr{L}.$$

$$Q_{\left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right]}:\quad \alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad 3\left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right]\mathscr{L} < t \leqslant T.$$

后二个矩形仅当 $\frac{T}{3\mathscr{L}}$ 不为整数时才出现，$\left[\frac{T}{3\mathscr{L}}\right]$ 是表示 $\frac{T}{3\mathscr{L}}$ 的整数部分（当 $T \leqslant 3\mathscr{L}$ 时，由引理 1 知 (16) 显然成立，所以我们总假定 $T > 3\mathscr{L}$）. 这些小矩形除后两个外，其高均为 $3\mathscr{L}$. 我们把所有对应于奇指标 m 的小矩形 Q_m 合在一起所组成的区域记作 D_1，把所有对应于偶指标 m 的小矩形 Q_m 合在一起所组成的区域记作 D_2. 显然，D_1（或 D_2）中任意两个小矩形之间的距离大于 $3\mathscr{L}$. 我们以 $N_i(\alpha, T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 在区域 $D_i(i = 1, 2)$ 中

的零点个数，则有

$$N(\alpha, T, \chi) = N_1(\alpha, T, \chi) + N_2(\alpha, T, \chi). \qquad (17)$$

现来讨论 $N_1(\alpha, T, \chi)$（对 $N_2(\alpha, T, \chi)$的讨论是完全一样的）。当 $\chi \neq \chi^0$ 时，以 $R_1(\chi)$ 记 D_1 中这样的小矩形 Q_m 的个数，在这些小矩形中 $L(s, \chi)$ 至少有一个零点。这样由引理 1 知

$$N_1(\alpha, T, \chi) \ll R_1(\chi) \log^2 qT.$$

当 $\chi = \chi^0$ 时，为使 $L(s, \chi^0)$ 的零点满足引理 2 的条件 (13)，我们计算 $R_1(\chi^0)$ 时将在 D_1 中除去小矩形 Q_{-1} 不计（对应于 $N_2(\alpha, T, \chi)$ 应在区域 D_2 中除去小矩形 Q_0 不计）。这样就有

$$N_1(\alpha, T, \chi^0) \ll (R_1(\chi^0) + 1)\log^2 qT.$$

以上两式合起来即得

$$\sum_{\chi} N_1(\alpha, T, \chi) \ll \left(1 + \sum_{\chi} R_1(\chi)\right) \log^2 qT. \qquad (18)$$

现在对每一 $L(s, \chi)$，从它所对应的 $R_1(\chi)$ 的小矩形中各选出一个零点

$$\rho_r(\chi) = \beta_r(\chi) + i\gamma_r(\chi) = \beta_r + i\gamma_r, \quad 1 \leqslant r \leqslant R_1(\chi).$$

显然 γ_r, $1 \leqslant r \leqslant R_1(\chi)$，构成一个 $3\mathscr{L}$ 佳位组，且这些零点均满足引理 2 的条件 (13)，故由引理 2 知，当 $\mathscr{L}$ 充分大时

$$1 \ll \mathscr{L} y^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\gamma_r-\mathscr{L}}^{\gamma_r+\mathscr{L}} \left|F_x\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right| dt$$
$$+ \mathscr{L} y^{1-\alpha} \int_{\gamma_r-\mathscr{L}}^{\gamma_r+\mathscr{L}} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it, \chi)| dt,$$

由此显然可以推得

$$1 \ll \left(\mathscr{L} y^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\gamma_r-\mathscr{L}}^{\gamma_r+\mathscr{L}} \left|F_x\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right| dt\right)^{4/3}$$
$$+ \left(\mathscr{L} y^{1-\alpha} \int_{\gamma_r-\mathscr{L}}^{\gamma_r+\mathscr{L}} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it, \chi)| dt\right)^2 \qquad (19)$$

亦成立。设 $t_r^{(1)} = t_r^{(1)}(\chi)$，$t_r^{(2)} = t_r^{(2)}(\chi)$ 分别适合条件

$$\left|F_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right| = \max_{\gamma_r-\mathscr{L} \leqslant t \leqslant \gamma_r+\mathscr{L}} \left|F_x\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|$$

$$|F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it_r^{(2)}, \chi)|$$

$$= \max_{\gamma_r - \mathscr{L} \leqslant t \leqslant \gamma_r + \mathscr{L}} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it, \chi)|,$$

显然 $t_r^{(1)}$, $1 \leqslant r \leqslant R(\chi)$, 及 $t_r^{(2)}$, $1 \leqslant r \leqslant R(\chi)$,均为$\mathscr{L}$ 佳位组. 这样由 (19) 式推得

$$1 \ll \mathscr{L}^{8/3} y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\alpha} \left| F_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^{4/3}$$

$$+ \mathscr{L}^4 y^{2-2\alpha} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it_r^{(2)}, \chi)|, \quad 1 \leqslant r \leqslant R(\chi).$$

进而有

$$\sum_{\chi} R(\chi) \ll \mathscr{L}^{\frac{8}{3}} y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\alpha} I_1 + \mathscr{L}^4 y^{2-2\alpha} I_2, \tag{20}$$

其中

$$I_1 = \sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| F_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^{4/3},$$

$$I_2 = \sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it_r^{(2)}, \chi)|^2.$$

现取

$$x = qT.$$

首先我们来估计 I_1. 由 (12) 式, $R(\chi) \ll T\mathscr{L}^{-1}$, 及 Schwarz 不等式可推得

$$I_1 \ll \sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left(1 + \left| L\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^{4/3} \left| M_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^{4/3}\right)$$

$$\ll \mathscr{L}^{-1}\phi(q)T + \left(\sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| L\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\times \left(\sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| M_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^2\right)^{\frac{2}{3}}.$$

由第三章定理 3 及定理 7 推得

$$\sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| L\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^4 \ll qT \log^6 qT,$$

再由 (11) 式及第二章定理 4 推得

$$\sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| M_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^2$$

$$\ll \frac{\phi(q)}{q} \sum_{n \leqslant qT} (qT + n) \frac{\log^2 2n}{n} \ll \phi(q) T \log^3 qT.$$

由以上三式即得

$$I_1 \ll qT \log^4 qT. \tag{21}$$

其次我们来估计 I_2. 当 $\sigma > 1$ 时

$$F_x(s, \chi) = 1 - L(s, \chi) M_x(s, \chi)$$
$$= \sum_{n > x} a_n \chi(n) n^{-s}, \quad |a_n| \leqslant d(n).$$

故由第二章定理 4 (取 $N \to \infty$) 及第三章引理 2 推论 1 可得

$$I_2 = \sum_{\chi} \sum_{r=1}^{R(\chi)} \left| \sum_{n > qT} a_n \chi(n) n^{-s} \right|^2$$
$$\ll \frac{\phi(q)}{q} \sum_{n > qT} (qT + n) \frac{d^2(n)}{n^{2+2\delta^{-1}}} \log^2 n \ll \log^6 qT. \tag{22}$$

由 (20), (21), (22) 式可推得

$$\sum_{\chi} R(\chi) \ll y^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\alpha} qT \log^{20/3} qT + y^{2-2\alpha} \log^{10} qT.$$

现取

$$y = (qT)^{\frac{3}{2(2-\alpha)}} (\log qT)^{\frac{-5}{(2-\alpha)}},$$

代入上式即得

$$\sum_{\chi} R(\chi) \ll (qT)^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}} \log^7 qT.$$

由此及 (18) 式推出

$$\sum_{\chi} N_1(\alpha, T, \chi) \ll (qT)^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}} \log^9 qT.$$

完全同样的可以证明

$$\sum_{\chi} N_2(\alpha, T, \chi) \ll (qT)^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}} \log^9 qT.$$

由以上二式及 (17) 式就推得 (16) 式,定理证毕.

特别地,当 $q = 1$ 时我们有

推论 1 设 $T \geqslant 2$, 则当 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ 时有

$$N(\alpha, T) \ll T^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}} \log^9 T \tag{23}$$

利用大筛法型的特征和均值估计，用完全平行的方法可以证明下面形式的大筛法型的零点密度估计

定理 2 设 $T \geqslant 2$, $Q \geqslant 1$, 则当 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ 时有

$$\sum_{q \leqslant Q} N^*(\alpha, T, q) \ll (Q^2 T)^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}} \log^9 QT. \tag{24}$$

定理 2 证明的过程和定理 1 完全相同. 这里要取 $\mathscr{L} = \log QT$ 代替原来的 $\log qT$. 证明的第一部分和定理 1 证明中的 (20) 式以前的一部分完全一样. 从 (20) 式开始凡是原来用求和号 $\sum\limits_{\chi}$ 的地方要用求和号 $\sum\limits_{q \leqslant Q} \sum\limits_{\chi}^{*}$ 来代替. 这里要取 $x = Q^2 T$ 代替原来的 qT. 在相应的 I_1 的估计中，对离散型的 L 函数四次均值估计仍用原来的第三章定理 3 及定理 7，然后对 q 相加，但对相应的 I_1 中的 $\left|M_x\left(\frac{1}{2} + it_r^{(1)}, \chi\right)\right|^2$ 的大筛法型的均值估计及相应的 I_2 的大筛法型均值估计要用第 2 章定理 12 来代替原来所用的第 2 章定理 4. 最后我们取

$$y = (Q^2 T)^{\frac{3}{2(2-\alpha)}} (\log QT)^{\frac{-5}{2-\alpha}},$$

就得所要的结果 (24) 式，详细的证明这里就不写出来了.

这两个定理将在第六，八，十，十二章中被用到.

§2. ζ 函数零点密度估计的改进

为了进一步改进 ζ 函数在 α 接近于 1 时的零点密度估计，我们需要先证明几个引理.

引理 3 设 $\boldsymbol{H}$ 为一复数域上的内积空间，$\xi \in \boldsymbol{H}$, $\varphi_r \in \boldsymbol{H}$, $1 \leqslant r \leqslant R$, 则有

$$\sum_{r=1}^{R} |(\xi, \varphi_r)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \max_{1 \leqslant r \leqslant R} \sum_{r'=1}^{R} |(\varphi_r, \varphi_{r'})|. \tag{25}$$

证　设 a_r, $1 \leqslant r \leqslant R$, 是任意复数，则由内积空间的 Schwarz 不等式

$$|(\xi, \eta)| \leqslant \|\xi\|\|\eta\|, \quad \xi, \eta \in \boldsymbol{H},$$

立即推得

$$\left|\sum_{r=1}^{R} a_r(\xi, \varphi_r)\right| = \left|\left(\xi, \sum_{r=1}^{R} \bar{a}_r\varphi_r\right)\right| \leqslant \|\xi\|\left\|\sum_{r=1}^{R} \bar{a}_r\varphi_r\right\|.$$

另一方面我们有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{r=1}^{R} \bar{a}_r\varphi_r\right\|^2 &= \sum_{r=1}^{R}\sum_{r'=1}^{R} \bar{a}_r a_{r'}(\varphi_r, \varphi_{r'}) \\ &\leqslant \sum_{r,r'} |a_r a_{r'}||(\varphi_r, \varphi_{r'})| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{r,r'} (|a_r|^2 + |a_{r'}|^2)|(\varphi_r, \varphi_{r'})| \\ &= \sum_{r=1}^{R} |a_r|^2 \sum_{r'=1}^{R} |(\varphi_r, \varphi_{r'})|.\end{aligned}$$

现取 $a_r = \overline{(\xi, \varphi_r)}$，由以上二式推得

$$\left(\sum_{r=1}^{R} |(\xi_r, \varphi_r)|^2\right)^2 \leqslant \|\xi\|^2\left(\sum_{r=1}^{R} |(\xi, \varphi_r)|^2 \sum_{r'=1}^{R} |(\varphi_r, \varphi_{r'})|\right).$$

由此即得 (25) 式，证毕

下面将讨论由复数域上的平方可和数列所构成的内积空间 L^2. 设 $\xi = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}, \cdots)$, $\eta = (\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(n)}, \cdots)$，其内积

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{(n)}\overline{\eta^{(n)}}.$$

引理 4　设 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$，我们有

$$\zeta(\sigma + it) \ll (|t| + 2)^{(1-\sigma)/2}\log(|t| + 2). \tag{26}$$

证　显然，只要对 $|t| \geqslant 2$ 来证明(26)式，由 [119] 定理 4.15 知，当 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $x > h > 0$, $y > h > 0$, $2\pi xy = |t|$ 时 $\zeta(s)$ 有渐近函数方程

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}+A(s)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(x^{-\sigma})+O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1})$$

其中 $A(s)$ 见第三章引理 7，$s=\sigma+it$. 现取 $x=y=\sqrt{\frac{|t|}{2\pi}}$，则由上式及第三章引理 7 立即推出 (26) 式，证毕.

引理 5

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\ll(|t|+2)^{\frac{1}{6}}\log(|t|+2). \tag{27}$$

证明见 [119，定理 5.12].

引理 6 设 $x\geqslant 9$，$|t|\geqslant\log x$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-it}e^{-n/x}\ll|t|^{\frac{1}{2}}\log^2(x|t|). \tag{28}$$

证 由第三章引理 5 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-it}e^{-n/x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(w)\zeta(w+it)x^w dw. \tag{29}$$

现考虑积分线路 $L=L_1+L_2+L_3$，L_1 为直线 $\left(-i\infty,-\frac{i}{\log x}\right]$，$L_2$ 为以原点为心的半圆，其半径为 $\frac{1}{\log x}$，幅角 θ 满足 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$L_3$ 为直线 $\left[\frac{i}{\log x},+i\infty\right)$. 由第三章引理 4 及 ζ 函数的阶的显然估计知，(29) 式右边的积分线路可移至 L，这时仅移过 ζ 函数的一个一级极点 $w=1-it$，残数为 $\Gamma(1-it)x^{1-it}$，由第三章引理 4 及条件 $|t|\geqslant\log x$ 可得

$$\Gamma(1-it)x^{1-it}\ll e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}|t|^{\frac{1}{2}}x\ll 1,$$

所以我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-it}e^{-n/x}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(w)\zeta(w+it)x^w dw+O(1). \tag{30}$$

现在估计 (30) 式右边的积分. 设 $w=u+iv$，

$$\left|\int_{L_3}\Gamma(w)\zeta(w+it)x^w dw\right|\leqslant\int_{1/\log x}^{2}|\Gamma(iv)||\zeta(i(t+v))|dv$$

$$+\int_2^{\infty}|\Gamma(iv)||\zeta(i(t+v))|dv. \tag{31}$$

由 $w\Gamma(w)=\Gamma(w+1)$ 知

$$|\Gamma(iv)|\ll \log x,\quad \frac{1}{\log x}\leqslant v\leqslant 2.$$

再由引理 4 知

$$\zeta(i(t+v))\ll |t|^{\frac{1}{2}}\log(|t|),\quad \frac{1}{\log x}\leqslant v\leqslant 2.$$

由以上二式即得

$$\int_{1/\log x}^{2}|\Gamma(iv)||\zeta(i(t+v))|dv\ll |t|^{\frac{1}{2}}\log x\log|t|. \tag{32}$$

当 $2\leqslant|v|\leqslant\infty$ 时，由第三章引理 4 知

$$\Gamma(iv)\ll e^{-\frac{1}{2}\pi|v|}|v|^{-\frac{1}{2}},$$

再由引理 4 知

$$\zeta(i(t+v))\ll(|t|^{\frac{1}{2}}+|v|^{\frac{1}{2}})\log(|t|+|v|),$$
$$2\leqslant|v|<\infty.$$

因而我们有

$$\int_2^{\infty}|\Gamma(iv)||\zeta(i(t+v))|dv\ll |t|^{\frac{1}{2}}\log|t|. \tag{33}$$

故由 (31)，(32)，(33) 式得

$$\left|\int_{L_3}\Gamma(w)\zeta(w+it)x^w dw\right|\ll |t|^{\frac{1}{2}}\log x\log|t|. \tag{34}$$

同样可得

$$\left|\int_{L_1}\Gamma(w)\zeta(w+it)x^w dw\right|\ll |t|^{\frac{1}{2}}\log x\log|t|. \tag{35}$$

在半圆周 L_2 上，同样由 $w\Gamma(w)=\Gamma(1+w)$ 知

$$\Gamma(w)\ll \log x\quad w\in L_2,$$

以及由引理 4 知

$$\zeta(w+it)\ll |t|^{\frac{1}{2}}\log|t|.$$

由以上二式即得

$$\left|\int_{L_2}\Gamma(w)\zeta(w+it)x^w dw\right|$$

$$\leqslant \int_{L_2} \log x\, |t|^{\frac{1}{2}} \log |t|\, x^{\frac{1}{\log x}}\, |dw|$$

$$\ll |t|^{\frac{1}{2}} \log |t|. \qquad (36)$$

综合以上(30)，(34)，(35)，(36)式即得(28)式，证毕。

我们可以看出在§1中为了得到零点密度估计，第二章定理4，定理12起着很重要的作用，这二个定理是给出了离散情形的特征和的均值估计，为了改进零点密度估计就需要改进这种均值估计，下面我们将利用内积空间不等式(25)式及引理6，对 $q=1$ 的情形来给出这种均值的另一个上界估计。

定理3 设 $T \geqslant 2$，$x \geqslant 9$，以及一组实数 t_r，$1 \leqslant r \leqslant R$，满足条件

$$\log x \leqslant |t_r - t_{r'}| \ll T, \quad r \neq r', \qquad (37)$$

则

$$\sum_{r=1}^{R} \Big| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n n^{-it_r} \Big|^2 \ll (x + R T^{\frac{1}{2}} \log^2 xT) \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} |a_n|^2. \qquad (38)$$

证 在引理3中取 $\xi = (\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(n)}, \cdots)$，

$$\xi^{(n)} = \begin{cases} a_n e^{n/2x} & 1 \leqslant n \leqslant x \\ 0 & n > x \end{cases}$$

及 $\varphi_r = (\varphi_r^{(1)}, \cdots \varphi_r^{(n)}, \cdots)$，$1 \leqslant r \leqslant R$，

$$\varphi_r^{(n)} = n^{-it_r} e^{-(n/2x)}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

所以

$$(\xi, \varphi_r) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n n^{-it_r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant R$$

$$\|\xi\|^2 = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} |a_n|^2 e^{n/x} \ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} |a_n|^2$$

$$(\varphi_r, \varphi_{r'}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-i(t_r - t_{r'})} e^{-(n/x)}$$

特别当 $r = r'$ 时

$$(\varphi_r, \varphi_r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n/x)} \ll x.$$

而当 $r \neq r'$ 时，因 t_r 满足条件 (37)，故由引理 6 知

$$(\varphi_r, \varphi_{r'}) \ll T^{\frac{1}{2}} \log^2(xT),$$

把以上结果代入引理 3 的 (25) 即得

$$\sum_{r=1}^{R} \Big| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n n^{-it_r} \Big|^2 = \sum_{r=1}^{R} |(\xi, \varphi_r)|^2$$

$$\leqslant \|\xi\|^2 \max_{1 \leqslant r \leqslant R} \Big((\varphi_r, \varphi_{r'}) + \sum_{r \neq r'} (\varphi_r, \varphi_{r'}) \Big)$$

$$\ll (x + RT^{\frac{1}{2}} \log^2(xT)) \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} |a_n|^2.$$

证毕.

定理 4 设 $T \geqslant 2$，则当 $\frac{11}{12} \leqslant \alpha < 1$ 时有

$$N(\alpha, T) \ll T^{\frac{5(1-\alpha)}{3(2\alpha-1)}} \log^{16} T. \tag{39}$$

证 定理证明的前半部分和定理 1 的 (19) 式以前的证明一样，只要在其中取 $q = 1$，$\mathscr{L} = \log T$，$R_1(\chi) = R_1(\zeta) = R_1$，以及取

$$F_x(s) = 1 - \zeta(s) M_x(s),$$

$$M_x(s) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \mu(n) n^{-s}.$$

这时相应选取的 $\zeta(s)$ 的零点

$$\rho_r = \beta_r + i\gamma_r \quad 1 \leqslant r \leqslant R_1,$$

亦是一个 $3\mathscr{L}$ 佳位组，由引理 2 知，当 $\mathscr{L}$ 充分大时有

$$1 \ll \mathscr{L} y^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\gamma_r - \mathscr{L}}^{\gamma_r + \mathscr{L}} \Big| F_x\Big(\frac{1}{2} + it\Big)\Big| dt$$

$$+ \mathscr{L} y^{1-\alpha} \int_{\gamma_r - \mathscr{L}}^{\gamma_r + \mathscr{L}} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it)| dt.$$

由此显然可得

$$1 \ll \mathscr{L}^2 y^{1-2\alpha} \Big(\int_{\gamma_r - \mathscr{L}}^{\gamma_r + \mathscr{L}} \Big| F_x\Big(\frac{1}{2} + it\Big)\Big| dt \Big)^2$$

$$+ \mathscr{L}^2 y^{2-2\alpha} \Big(\int_{\gamma_r - \mathscr{L}}^{\gamma_r + \mathscr{L}} |F_x(1 + \mathscr{L}^{-1} + it)| dt \Big)^2. \tag{40}$$

同样设 $t_r^{(1)}$, $t_r^{(2)}$ 分别适合条件

$$\left|F_x\left(\frac{1}{2}+it_r^{(1)}\right)\right| = \max_{\gamma_r-\mathscr{L}\leqslant t\leqslant\gamma_r+\mathscr{L}}\left|F_x\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|, \quad 1\leqslant r\leqslant R_1,$$

$$|F_x(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})| = \max_{\gamma_r-\mathscr{L}\leqslant t\leqslant\gamma_r+\mathscr{L}}|F_x(1+\mathscr{L}^{-1}+it)|,$$

$$1\leqslant r\leqslant R_1.$$

显然 $t_r^{(1)}$, $1\leqslant r\leqslant R_1$ 及 $t_r^{(2)}$, $1\leqslant r\leqslant R_1$, 都是 $\mathscr{L}$ 佳位组. 由以上二式及 (40) 式得

$$R_1 \ll \mathscr{L}^4 y^{1-2\alpha}\sum_{r=1}^{R_1}\left|1-\zeta\left(\frac{1}{2}+it_r^{(1)}\right)M_x\left(\frac{1}{2}+it_r^{(1)}\right)\right|^2$$

$$+\mathscr{L}^4 y^{2-2\alpha}\sum_{r=1}^{R_1}|1-\zeta(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})$$

$$\times M_x(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})|^2. \tag{41}$$

利用引理 5 及

$$1-\zeta(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})M_x(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})$$

$$=\sum_{n>x}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}, \quad |a_n|\leqslant d(n),$$

从上式得

$$R_1 \ll \mathscr{L}^4 y^{1-2\alpha}\left[R_1 + T^{\frac{1}{3}}\log^2 T\sum_{r=1}^{R_1}\left|M_x\left(\frac{1}{2}+it_r^{(1)}\right)\right|^2\right]$$

$$+\mathscr{L}^4 y^{2-2\alpha}\sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{n>x}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2. \tag{42}$$

现取

$$x = R_1 T^{\frac{1}{3}}\log^2 xT. \tag{43}$$

由定理 1 推论知, 这里的 R_1 一定有

$$R_1 \ll T^{\frac{3(1-\alpha)}{(2-\alpha)}}\log^9 T, \quad \frac{1}{2}\leqslant\alpha<1.$$

所以只要 T 充分大, 当 $\alpha>\frac{4}{5}+\varepsilon$ 时就一定有

$$x<T, \tag{44}$$

即

$$\log x < \log T = \mathscr{L}. \tag{45}$$

所以当 T 充分大及 $\alpha \geqslant \frac{11}{12} > \frac{4}{5}$ 时，二组实数 $\{t_r^{(1)}\}$ 及 $\{t_r^{(2)}\}$ 都满足定理 3 的条件 (37)，这样由定理 3 及 (43) 式得

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{R_1}\left|M_x\left(\frac{1}{2}+it_r^{(1)}\right)\right|^2 &\ll (x+R_1T^{\frac{1}{2}}\log^2 xT)\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n}\\ &\ll R_1T^{\frac{1}{2}}\log^3 T.\end{aligned} \tag{46}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{n>x}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2 &\ll \sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{x<n\leqslant T}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2\\ &+\sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{n>T}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2.\end{aligned} \tag{47}$$

当 $x < M < T$ 时，由定理 3 及第三章引理 2 推论 1 得

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{M<n\leqslant 2M}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2\\ &\ll (M+R_1T^{\frac{1}{2}}\log^2 T)\sum_{M<n\leqslant 2M}\frac{d^2(n)}{n^2}\ll \log^3 T,\end{aligned}$$

所以由此推得

$$\sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{x<n\leqslant T}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2 \ll \log^5 T. \tag{48}$$

同时利用第二章定理 4 (取 $q=1$, $N\to\infty$) 得

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{R_1}\left|\sum_{n>T}a_n n^{-(1+\mathscr{L}^{-1}+it_r^{(2)})}\right|^2 &\ll \sum_{n>T}(n+T)n^{-(2+2\mathscr{L}^{-1})}\log^2 n\\ &\ll \log^3 T.\end{aligned} \tag{49}$$

由以上 (42), (46), (47), (48), (49) 式得

$$R_1 \ll R_1 y^{1-2\alpha}T^{\frac{1}{2}}\log^8 T + y^{2-2\alpha}\log^9 T. \tag{50}$$

现取

$$y = T^{\frac{5}{6}}R_1\log^{-1}T, \tag{51}$$

即推得当 T 充分大，$1 > \alpha \geqslant \frac{11}{12}$ 时有

$$R_1 \ll T^{\frac{5(1-\alpha)}{3(2\alpha-1)}} \log^{14} T.$$

由此及 (18) 式(取 $q = 1$) 即得 (39) 式，证毕.

当 $\alpha > \frac{11}{12}$ 时

$$\frac{5}{3} \frac{1}{(2\alpha - 1)} < 2$$

所以这结果当 $\alpha > \frac{11}{12}$ 时优于密度假设.

定理 4 和定理 1 的证明的不同之处，除了以定理 3 来代替第 2 章的定理 4 外，另一可能更重要的不同之处是：这儿利用了 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$ 上的阶的估计，即引理 5（为了证明这一结果需要用到渐近函数方程及三角和估计），而在定理 1 的证明中，用到的是第三章的四次中值公式.

本节所用的方法通常称为 Halász 方法.

第五章　线性素变数三角和估计

本章主要讨论线性素变数三角和

$$S(\alpha, x)=\sum_{p\leqslant x} e(\alpha p) \tag{1}$$

的估计，其中 α 为任一实数，$x\geqslant 2$，变数 p 取素数．我们将在 § 1—3 中分别用 Виноградов 三角和估计方法，L 函数零点密度估计方法以及复变积分法等三个方法来得到三角和（1）的上界估计．同时，在 § 1 和 § 3 中，还将讨论下述形式的素变数三角和

$$\sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p). \tag{2}$$

§ 1. Виноградов 方法[138],[139]

定义 1　设 x 为任一实数，以 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，称 $[x]$ 为 x 的整数部份；以 $\{x\}$ 表示 $x-[x]$，称 $\{x\}$ 为 x 的分数部份；以 $\langle x\rangle$ 表示 x 到最近整数的距离，即 $\langle x\rangle=\min(\{x\}, 1-\{x\})$.

引理 1　设 U 为正整数，α 为实数，我们有

$$\left|\sum_{u=1}^{U} e(\alpha u)\right|\leqslant \min\left(U, \frac{1}{2\langle\alpha\rangle}\right). \tag{3}$$

证　无妨一般可假定 $0\leqslant\alpha<1$．我们有显然估计

$$\left|\sum_{u=1}^{U} e(\alpha u)\right|\leqslant U. \tag{4}$$

而当 $0<\alpha<1$ 时，有

$$\sum_{u=1}^{U} e(\alpha u)=\frac{e^{2\pi i(U+1)\alpha}-e^{2\pi i\alpha}}{e^{2\pi i\alpha}-1},$$

所以

$$\left|\sum_{u=1}^{U} e(\alpha u)\right| \leqslant \frac{1}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\sin \pi\langle\alpha\rangle}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5}$$

由于当 $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ 时有

$$\left(\frac{\sin \pi t}{t}\right)' \leqslant 0,$$

故有

$$2 \leqslant \frac{\sin \pi t}{t} \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{2}.$$

由此及(5)式得

$$\left|\sum_{u=1}^{U} e(\alpha u)\right| \leqslant \frac{1}{2\langle\alpha\rangle}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

从上式及(4)式立即推出(3)式,证毕.

引理 2 设 $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$, $x_0, x_1, \cdots, x_K$ 为一组实数,满足条件

$$\langle x_k - x_{k'}\rangle \geqslant \rho, \quad k \neq k'. \tag{6}$$

及 $\langle x_0\rangle = \min(\langle x_1\rangle, \cdots, \langle x_k\rangle)$, 则有

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\langle x_k\rangle} \ll \rho^{-1}\log(K+1). \tag{7}$$

证 无妨一般可设 $|x_k| \leqslant \frac{1}{2}$, $0 \leqslant k \leqslant K$. 这样就有 $\langle x_k\rangle = |x_k|$. 我们可把 $x_0, x_1, \cdots, x_K$ 重新按大小次序排列成

$$-\frac{1}{2} \leqslant y_{-K_1} < y_{-K_1+1} < \cdots < y_{-1} < y_0 < \cdots < y_{K_2} \leqslant \frac{1}{2},$$

并有 $x_0 = y_0$, $K_1 + K_2 = K$, 以及

$$|y_0| = \min_{-K_1 \leqslant k \leqslant K_2}(|y_k|).$$

由这样的排列法及引理条件显然可得

$$-\frac{1}{2} \leqslant y_{-K_1} < y_{-K_1+1} < \cdots < y_{-1} \leqslant -\frac{\rho}{2},$$

$$|y_k| \geqslant \frac{\rho}{2} + (|k| - 1)\rho, \quad -K_1 \leqslant k \leqslant -1,$$

以及

$$\frac{\rho}{2} \leqslant y_1 < \cdots < y_{K_2} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$y_k \geqslant \frac{\rho}{2} + (k-1)\rho, \quad 1 \leqslant k \leqslant K_2.$$

因而我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\langle x_k \rangle} &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|x_k|} = \sum_{k=-K_1}^{-1} \frac{1}{|y_k|} + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{1}{y_k} \\ &\leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{k=-K_1}^{-1} \frac{1}{|k| - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{K_2} \frac{1}{k - \frac{1}{2}} \\ &\ll \frac{1}{\rho} \log(K+1),\end{aligned}$$

证毕.

不难看出，对于满足条件 (6) 的任意一组实数 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 一定有

$$K \leqslant \rho^{-1}. \tag{8}$$

因而我们有

推论 1 在引理 2 的条件下，我们有

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\langle x_k \rangle} \ll \rho^{-1} \log \rho^{-1}. \tag{9}$$

下面我们以 α 表一实数，且可表为

$$\alpha = \frac{h}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (q, h) = 1, \quad q \geqslant 1, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{10}$$

引理 3 设实数 α 由 (10) 式给出，则对任意实数 $U > 0$，整数 K_0，正整数 K 及任意实数 β 有

$$\sum_{k=K_0+1}^{K_0+K} \min\left(U, \frac{1}{\langle \alpha k + \beta \rangle}\right) \ll \left(\frac{K}{q} + 1\right)(U + q \log q). \tag{11}$$

证　当 $q \leqslant 3$ 时，(11) 式显然成立，所以我们可假定 $q \geqslant 4$. 不难看出，为了证明 (11) 式，只要证明对任意实数 θ_1 有

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{q}{2}}\min\left(U,\frac{1}{\langle\alpha k+\beta_1\rangle}\right)\ll U+q\log q. \tag{12}$$

为此我们考虑实数列 $z_k=\alpha k+\beta_1$, $1\leqslant k\leqslant\left[\frac{q}{2}\right]$，对其中任意二个不同的实数 z_k, $z_{k'}$, $k\neq k'$ 有

$$\begin{aligned}\langle z_k-z_{k'}\rangle&=\langle(k-k')\alpha\rangle=\left\langle(k-k')\frac{h}{q}+(k-k')\frac{\theta}{q^2}\right\rangle\\&\geqslant\left\langle(k-k')\frac{h}{q}\right\rangle-\left\langle(k-k')\frac{\theta}{q^2}\right\rangle\\&\geqslant\frac{1}{q}-\frac{1}{2q}=\frac{1}{2q},\end{aligned}$$

这里用到条件 $|k-k'|\leqslant\frac{q}{2}$，(10)式及不等式

$$\langle x-y\rangle\geqslant\langle x\rangle-\langle y\rangle.$$

我们可以把实数列 $z_k\left(1\leqslant k\leqslant\left[\frac{q}{2}\right]\right)$ 重新排列为 x_0, x_1, $\cdots$, $x_{[\frac{q}{2}]-1}$，使它满足引理 2 的条件$\left(\text{取 }\rho=\frac{1}{2q}, K=\left[\frac{q}{2}\right]-1\right)$. 这样，由此及引理 2 可得

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{q}{2}}\min\left(U,\frac{1}{\langle\alpha k+\beta_1\rangle}\right)&=\sum_{k=0}^{[\frac{q}{2}]-1}\min\left(U,\frac{1}{\langle x_k\rangle}\right)\\&\leqslant U+\sum_{k=1}^{[\frac{q}{2}]-1}\frac{1}{\langle x_k\rangle}\ll U+q\log q,\end{aligned}$$

这就证明了(12)式，引理证毕.

引理 4 设实数 α 由(10)式给出，则有

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{q}{2}}\frac{1}{\langle\alpha k\rangle}\ll q\log q. \tag{13}$$

证 当 $1\leqslant k\leqslant\frac{q}{2}$ 时，由(10)知

$$\langle \alpha k\rangle = \left\langle \frac{h}{q} k + \frac{\theta}{q^2} k \right\rangle \geqslant \left\langle \frac{h}{q} k \right\rangle - \left\langle \frac{\theta}{q^2} k \right\rangle$$

$$\geqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{2q},$$

由此及引理 3 得

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{q}{2}} \frac{1}{\langle \alpha k\rangle} \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{q}{2}} \min\left(2q, \frac{1}{\langle \alpha k\rangle}\right) \ll q \log q.$$

证毕.

引理 5 设实数 α 由(10)式给出,则对任意正数 U 及 $K \geqslant 2$,有

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \min\left(\frac{U}{k}, \frac{1}{\langle \alpha k\rangle}\right) \ll q \log q + \frac{U}{q} \log K + K \log q. \quad (14)$$

证 设正整数 s_0 满足

$$\left(s_0 - \frac{1}{2}\right) q < K \leqslant \left(s_0 + \frac{1}{2}\right) q,$$

由此及引理 3, 引理 4 可得

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \min\left(\frac{U}{k}, \frac{1}{\langle \alpha k\rangle}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{q}{2}} + \sum_{\frac{q}{2} < k \leqslant \frac{3}{2} q} + \cdots$$

$$+ \sum_{(s_0 - \frac{1}{2})q < k \leqslant (s_0 + \frac{1}{2})q} \ll \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{q}{2}} \frac{1}{\langle \alpha k\rangle}$$

$$+ \sum_{s=1}^{s_0} \left(\frac{U}{qs} + q \log q\right) \ll q \log q$$

$$+ \frac{U}{q} \log K + K \log q.$$

证毕.

引理 6 设实数 α 由 (10) 式给出, $x \geqslant 2$, F_1, F_2 为任意二个给定的递增正整数序列, 则对任意正数 U, U', $1 \leqslant U \leqslant x$, $U < U' \leqslant 2U$, 有

$$I_1 = \sum_{\substack{U \leqslant u < U' \\ u \in F_1}} \sum_{\substack{1 \leqslant uv \leqslant x \\ v \in F_2}} e(\alpha uv) \ll x \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{x} \log q\right.$$

$$+\frac{1}{U}\log q+\frac{U}{x}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

证　利用 Schwarz 不等式可得

$$|I_1|^2\leqslant\Big(\sum_{U\leqslant u<U'}1\Big)\Big(\sum_{U\leqslant u<U'}\Big|\sum_{\substack{1\leqslant uv\leqslant x\\ v\in F_2}}e(\alpha uv)\Big|^2\Big)$$

$$\leqslant U\sum_{U\leqslant u<U'}\sum_{\substack{1\leqslant v_1\leqslant x/u\\ v_1\in F_2}}\sum_{\substack{1\leqslant v_2\leqslant x/u\\ v_2\in F_2}}e(\alpha u(v_1-v_2))$$

$$\leqslant U\sum_{\substack{1\leqslant v_1\leqslant x/U\\ v_1\in F_2}}\sum_{\substack{1\leqslant v_2\leqslant x/U\\ v_2\in F_2}}\sum_{U\leqslant u\leqslant b}e(\alpha u(v_1-v_2)),$$

这里 $b\leqslant\min\Big(U',\frac{x}{v_1},\frac{x}{v_2}\Big)$. 再由引理 1 ,引理 3 即得

$$|I_1|^2\leqslant U\sum_{1\leqslant v_1\leqslant x/U}\sum_{1\leqslant v_2\leqslant x/U}\min\Big(U,\frac{1}{\langle\alpha(v_1-v_2)\rangle}\Big)$$

$$\leqslant U\frac{x}{U}\Big(\frac{x}{Uq}+1\Big)(U+q\log q),$$

由此即得 (15) 式,证毕.

引理 7　设 $x\geqslant 2$, $H=e^{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}$, $P=\prod_{p<H^2}p$, 以及实数 α 由 (10) 式给出, 且 $1\leqslant q\leqslant x$, 我们有

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ (n,P)=1}}e(\alpha n)\ll x\log x\Big(\frac{q}{x}+\frac{1}{q}+\frac{1}{H}\Big). \tag{16}$$

证　利用 Möbius 函数由引理 1 可得

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ (n,P)=1}}e(\alpha n)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}e(\alpha n)\sum_{k|(n,P)}\mu(k)$$

$$=\sum_{k|P}\mu(k)\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ k|n}}e(\alpha n)=\sum_{\substack{k|P\\ xH^{-2}\leqslant k\leqslant x}}+\sum_{\substack{k|P\\ k<xH^{-2}}}$$

$$\ll\sum_{\substack{k|P\\ xH^{-2}\leqslant k\leqslant x}}\frac{x}{k}+\sum_{\substack{k|P\\ k<xH^{-2}}}\min\Big(\frac{x}{k},\frac{1}{\langle\alpha k\rangle}\Big).$$

由引理 5 可推得

$$\sum_{\substack{k|P\\k<xH^{-2}}}\min\left(\frac{x}{k},\frac{1}{\langle\alpha k\rangle}\right)\ll q\log q+\frac{x}{q}\log x+\frac{x}{H^2}\log q.$$

下面来估计第一个和式。因 $k|P$，所以 $\mu(k)\neq 0$，及 k 的素因子都小于 H^2。故当 $k\geqslant xH^{-2}$ 时有

$$H^{2\nu_1(k)}\geqslant xH^{-2},$$

$$\nu_1(k)\geqslant\sqrt{\log x}-1.$$

由于 $\mu(k)\neq 0$，所以 $d(k)=2^{\nu_1(k)}$，故得

$$d(k)\geqslant 2^{\sqrt{\log x}-1}.$$

由此及第三章引理 2，我们有

$$\sum_{\substack{k|P\\xH^{-2}\leqslant k\leqslant x}}\frac{x}{k}\ll\frac{x}{2^{\sqrt{\log x}}}\sum_{k\leqslant x}\frac{d(k)}{k}\ll\frac{x}{H}. \tag{17}$$

综合以上估计及 $\log q\leqslant\log x$ 即得(16)式，证毕。

定理 1 设 $x\geqslant 2$，实数 α 由(10)式给出且 $1\leqslant q\leqslant x$，我们有

$$S(x,\alpha)\ll x\log^2 x\left(\sqrt{\frac{q}{x}+\frac{1}{q}+\frac{1}{H}}\right), \tag{18}$$

其中 $H=e^{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}$。

证 设 $P=\prod_{p<H^2}p$，我们有

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\(n,P)=1}}e(\alpha n)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\(n,P)=1,\,\mu(n)\neq 0}}e(\alpha n)+O(xH^{-2})$$

$$=\sum_{p\leqslant x}e(\alpha p)+\sum_{k=2}^{K}T_k+O(xH^{-2}), \tag{19}$$

其中

$$T_k=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\(n,P)=1\\\mu(n)\neq 0,\,\nu_1(n)=k}}e(\alpha n),\quad 2\leqslant k\leqslant K.$$

由于上式中的 n 的素因子 $\geqslant H^2$，所以一定有

$$K \leqslant \sqrt{\log x}.$$

现在我们来估计 T_k. 为此,考虑和

$$T'_k = \sum_{H^2 \leqslant p < xH^{-2(k-1)}} \sum_{\substack{pm \leqslant x \\ (m, p)=1 \\ \mu(m) \neq 0, \nu_2(m) = k-1}} e(\alpha pm), 2 \leqslant k \leqslant K.$$

显然 T'_k 中使 pm 出现平方因子的项数 $\ll xH^{-2}$, 而 T_k 中每一项(都是无平方因子的)在 T'_k 中必定重复出现 k 次,所以有

$$T_k = \frac{1}{k}(T'_k + O(xH^{-2})).$$

用熟知的对数分法,由引理 6 及 $q \leqslant x$ 可得

$$T'_k \ll x(\log x)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{q} + \frac{q}{x} + \frac{1}{H^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由以上二式及 (19) 式,应用引理 7 即得

$$\sum_{p \leqslant x} e(\alpha p) \ll x \log x \left(\frac{q}{x} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H}\right) + \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k}(T'_k + O(xH^{-2}))$$

$$\ll x \log^{\frac{3}{2}} x \log \log x \left(\sqrt{\frac{q}{x} + \frac{1}{q}} + \frac{1}{H}\right).$$

这就证明了 (18) 式.

利用熟知的方法易得

推论 2 设 $x \geqslant 2$, 在定理 1 的条件和符号下,我们有

$$S^{(1)}(\alpha, x) = \sum_{p \leqslant x} \log p e(\alpha p) \ll x \log^3 x \left(\sqrt{\frac{q}{x} + \frac{1}{q}} + \frac{1}{H}\right), \quad (20)$$

及

$$S^{(2)}(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll x \log^3 x \left(\sqrt{\frac{q}{x} + \frac{1}{q}} + \frac{1}{H}\right). \quad (21)$$

定理 1 及其推论 2 实际上是一个较弱的结果. 利用 Виноградов 方法,作更仔细的讨论,我们可以得到更好的估计,对此这里不介绍了. 但我们将在 § 2, § 3 中用分析方法来证明这类更强的结果. 为了证明三素数定理,定理 1 的结果是完全足够了. 容易

看出，对充分大的 x，估计式 (18)，(20)，(21) 仅当 $\log^6 x \leqslant q \leqslant x\log^{-6} x$ 时才能得到有效的非显然估计.

为了证明每一个充分大的奇数可以表为三个几乎相等的素数之和，我们需要讨论形如

$$\sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p) \tag{22}$$

的线性素变数三角和. 在一般情形下，对这种类型的三角和至今还不能利用分析方法，而只能利用 Виноградов 方法来加以估计. 为此，我们首先需要把引理 6 及引理 7 作相应的推广.

引理 8 若 $x \geqslant 1$，则

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{1}{2}}), \tag{23}$$

其中 γ 是 Euler 常数.

证 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant x} d(n) &= \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{s|n} 1 = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} 1 \\ &= [\sqrt{x}]^2 + 2\sum_{1\leqslant s\leqslant[\sqrt{x}]}\ \sum_{[\sqrt{x}]<t\leqslant x/s} 1 \\ &= -[\sqrt{x}]^2 + 2\sum_{1\leqslant s\leqslant[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{s}\right] \\ &= -x + 2\sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{x}}\frac{x}{s} + O(x^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{s} = \frac{1}{2}\log x + \gamma + O(x^{-\frac{1}{2}}),$$

把此结果代入上式即得 (23) 式，证毕.

由此引理立即推得下面的推论

推论 3 设 $x \geqslant 2$，$x^{\frac{1}{2}} \leqslant A \leqslant x$，则

$$\sum_{x-A<n\leqslant x} d(n) \ll A\log x. \tag{24}$$

证 由 (23) 式得

$$\sum_{x-A<n\leqslant x} d(n)=x\log x-(x-A)\log(x-A)$$
$$+(2\gamma-1)A+O(x^{\frac{1}{2}}),$$

而

$$x\log x-(x-A)\log(x-A)=\int_{x-A}^{x}(\log t+1)dt$$
$$\leqslant A\log x+A\ll A\log x.$$

由以上两式及条件 $A\geqslant x^{\frac{1}{2}}$ 即得 (24) 式，证毕.

引理 9 在引理 6 的条件和符号下，并设 $x^{\frac{1}{2}}\leqslant A\leqslant x$ 及 $q\leqslant x$，我们有

$$I_2=\sum_{\substack{U\leqslant u<U'\\ u\in F_1}}\sum_{\substack{x-A<uv\leqslant x\\ v\in F_2}} c(auv)$$
$$\ll A\log x\left(\frac{1}{q}+\frac{xq}{A^2}+\frac{x}{AU}+\frac{U}{A}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (25)$$

证 当 $A\leqslant U$ 时，由推论 3 可得

$$|I_2|\leqslant\sum_{U\leqslant u<U'}\sum_{x-A<uv\leqslant x}1=\sum_{x-A<n\leqslant x}\sum_{\substack{U\leqslant u<U'\\ u|n}}1$$
$$\leqslant\sum_{x-A<n\leqslant x}d(n)\ll A\log x,$$

所以 (25) 式成立. 其次，当 $U<A$, $AU\leqslant x$ 时，

$$|I_2|\ll\sum_{U\leqslant u<U'}\frac{A}{U}\ll A.$$

所以 (25) 式亦成立. 因此，我们只要对

$$A\geqslant\max\left(U,\frac{x}{U}\right)$$

的情形来证明 (25) 式. 为此，我们把区间 $U\leqslant u<U'$ 分为个数 $\ll\frac{x}{A}$，长度 $\ll\frac{AU}{x}$ 的小区间 $a_1\leqslant u<a_2$，所以 $a_2-a_1\ll\frac{AU}{x}$. 我们来估计

$$I_2'=\sum_{\substack{a_1\leqslant u<a_2\\ u\in F_1}}\sum_{\substack{x-A<uv\leqslant x\\ v\in F_2}} c(auv).$$

利用 Schwarz 不等式可得

$$|I_2'|^2 \leqslant \Big(\sum_{a_1 \leqslant u < a_2} 1\Big)\Big(\sum_{a_1 \leqslant u < a_2} \Big|\sum_{\substack{x-A < uv \leqslant x \\ v \in F_2}} e(\alpha uv)\Big|^2\Big)$$

$$\ll \frac{AU}{x} \sum_{a_1 \leqslant u < a_2} \sum_{\substack{x-A < uv_1 \leqslant x \\ v_1 \in F_2}} \sum_{\substack{x-A < uv_2 \leqslant x \\ v \in F_2}} e(\alpha(v_1 - v_2)u)$$

$$= \frac{AU}{x} \sum_{\substack{\frac{x-A}{a_2} < v_1 \leqslant \frac{x}{a_1} \\ v_1 \in F_2}} \sum_{\substack{\frac{x-A}{a_2} < v_2 \leqslant \frac{x}{a_1} \\ v_2 \in F_2}} \sum_{b_1 \leqslant u < b_2} e(\alpha(v_1 - v_2)u),$$

其中

$$b_1 \geqslant \max\Big(a_1, \frac{x-A}{v_1}, \frac{x-A}{v_2}\Big), \quad b_2 \leqslant \min\Big(a_2, \frac{x}{v_1}, \frac{x}{v_2}\Big)$$

$$b_2 - b_1 \leqslant a_2 - a_1 \ll \frac{AU}{x}.$$

由引理 1 即得

$$|I_2'|^2 \ll \frac{AU}{x} \sum_{\frac{x-A}{a_2} < v_1 \leqslant \frac{x}{a_1}} \sum_{\frac{x-A}{a_2} < v_2 \leqslant \frac{x}{a_1}} \min\Big(\frac{AU}{x}, \frac{1}{\langle \alpha(v_1 - v_2)\rangle}\Big).$$

由于

$$\frac{x}{a_1} - \frac{x-A}{a_2} = \frac{x(a_2 - a_1) + Aa_1}{a_1 a_2} \ll \frac{A}{U},$$

故由引理 3 得

$$|I_2'|^2 \ll \frac{AU}{x}\frac{A}{U}\Big(\frac{A}{qU} + 1\Big)\Big(\frac{AU}{x} + q\log q\Big).$$

由此利用 Schwarz 不等式不难推得

$$|I_2|^2 \ll \frac{x}{A}\frac{x}{A}\frac{AU}{x}\frac{A}{U}\Big(\frac{A}{qU} + 1\Big)\Big(\frac{AU}{x} + q\log q\Big)$$

$$= x\Big(\frac{A}{qU} + 1\Big)\Big(\frac{AU}{x} + q\log q\Big)$$

$$= A^2\Big(\frac{1}{q} + \frac{xq}{A^2}\log q + \frac{x}{AU}\log q + \frac{U}{A}\Big).$$

由此及 $q \leqslant x$ 即得 (25) 式，证毕.

引理 10 在引理 7 的条件和符号下，并设 $xH^{-\frac{1}{2}} \leqslant A \leqslant x$,

我们有

$$\sum_{\substack{x-A<n\leqslant x\\(n,P)=1}} e(\alpha n) \ll A\log x\left(\frac{q}{A}+\frac{1}{q}+\frac{1}{H^{1/2}}\right). \qquad (26)$$

证　证明的方法和引理7完全一样，利用 Möbius 函数由引理1可得

$$\sum_{\substack{x-A<n\leqslant x\\(n,P)=1}} e(\alpha n) \ll \sum_{\substack{k\mid P\\ xH^{-2}\leqslant k\leqslant x}} \frac{x}{k} + \sum_{\substack{k\mid P\\ k<xH^{-2}}} \min\left(\frac{A}{k}, \frac{1}{\langle\alpha k\rangle}\right).$$

由引理5及 $A\geqslant xH^{-\frac{1}{2}}$ 可推得

$$\sum_{\substack{k\mid P\\ k<xH^{-2}}} \min\left(\frac{A}{k}, \frac{1}{\langle\alpha k\rangle}\right) \ll q\log q+\frac{A}{q}\log x+\frac{x}{H^2}\log q$$

$$\ll q\log q+\frac{A}{q}\log x+\frac{A}{H^{3/2}}\log q.$$

由(17)式及 $A\geqslant xH^{-\frac{1}{2}}$ 得

$$\sum_{\substack{k\mid P\\ xH^{-2}\leqslant k\leqslant x}} \frac{x}{k} \ll \frac{x}{H} \leqslant \frac{A}{H^{1/2}}.$$

由以上三式及 $q\leqslant x$ 立即推出(26)式，证毕。

如同由引理6，引理7推出定理1一样，由引理9，引理10可证明下面的定理

定理2　在定理1的条件和符号下，并设 $xH^{-\frac{1}{2}}\leqslant A\leqslant x$，我们有

$$\sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p) \ll A\log^3 x\left(\sqrt{\frac{xq}{A^2}}+\frac{1}{q}+\frac{1}{H^{1/2}}\right). \qquad (27)$$

证　设 $P=\prod_{p<H^2} p$，和(19)式一样可得

$$\sum_{\substack{x-A<n\leqslant x\\(n,P)=1}} e(\alpha n) = \sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p)+\sum_{k=2}^{K} T_k(A)+O(xH^{-2}),$$

其中

$$T_k(A) = \sum_{\substack{x-A<n\leqslant x \\ (n,P)=1 \\ \mu(n)\neq 0,\, \nu(n)=k}} e(\alpha n),\ 2 \leqslant k \leqslant K,\quad K \leqslant \sqrt{\log x}.$$

和定理 1 中相类似，考虑和

$$T'_k(A) = \sum_{H^2 \leqslant p < xH^{-2(k-1)}} \sum_{\substack{x-A<pm\leqslant x \\ (m,P)=1 \\ \mu(m)\neq 0,\, \nu(m)=k-1}} e(\alpha pm),$$

我们可得

$$T_k(A) = \frac{1}{k}\left(T'_k(A) + O(xH^{-2})\right).$$

用熟知的对数分法由引理 9 及 $A \geqslant xH^{-\frac{1}{2}}$ 可得

$$T'_k(A) \ll A\log^2 x\left(\frac{xq}{A^2} + \frac{1}{q} + \frac{x}{AH^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll A\cdot\log^2 x\left(\sqrt{\frac{xq}{A^2} + \frac{1}{q}} + \frac{1}{H^{3/4}}\right).$$

综合以上各式及引理 10 可得(利用 $q \leqslant x$ 及 $A \geqslant xH^{-\frac{1}{2}}$):

$$\sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p) \ll A\log x\left(\frac{q}{A} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H^{1/2}}\right)$$

$$+ \sum_{k=2}^{K}\frac{1}{k}\left(T'_k(A) + O(xH^{-2})\right)$$

$$\ll A\log^2 x\cdot\log\log x\left(\sqrt{\frac{xq}{A^2} + \frac{1}{q}} + \frac{1}{H^{1/2}}\right).$$

这就证明了(27)式，证毕.

容易看出，定理 2 所得的估计式(27)，仅当$\log^6 x \leqslant q \leqslant \frac{A^2}{x}\log^{-6} x$时，才能得到有效的非显然估计.

§2. 零点密度估计方法

Ю. В. Линник[74—76] 首先利用 L 函数零点密度估计方法得到了线性素变数三角和(1)的估计，从而对三素数定理给出了一个有价值的完全分析的新证明. 后来一些数学工作者对这一证明方

法作了简化与改进[122],[82],[52].

引理 11 设实数 $x \geqslant 2$，正整数 $q \geqslant 1$，$\chi(n)$ 为模 q 的特征，再设

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n)\Lambda(n), \tag{28}$$

则对任意实数 T，$2 \leqslant T \leqslant x$，有

$$\psi(x, \chi) = E_0 x - \tilde{E}\frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}}{}' \frac{x^\rho}{\rho}$$
$$+ O\left(\frac{x}{T}\log^2 qx + \tilde{E} x^{\frac{1}{4}} \log qx\right), \tag{29}$$

其中

$$E_0 = \begin{cases} 1, & \chi = \chi^0, \\ 0, & \chi \neq \chi^0, \end{cases}$$

$\tilde{\beta}$ 及 $1 - \tilde{\beta}$ 是 $L(s, \chi)$ 可能存在的例外零点1)，

$$\tilde{E} = \begin{cases} 1, & \tilde{\beta} \text{ 存在;} \\ 0, & \tilde{\beta} \text{ 不存在;} \end{cases}$$

$\rho = \beta + i\gamma$ 是 $L(s, \chi)$ 的非显明零点，$0 < \beta < 1$，$\sum_\rho{}'$ 表示对除去二个可能存在的例外零点 $\tilde{\beta}, 1-\tilde{\beta}$ 以外的所有非显明零点求和。

证 见 [92, Satz 4.6] 或 [24，第 19 章].

有时我们把 (29) 式写成

$$\psi(x, \chi) = E_0 x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}\log^2 qx\right). \tag{30}$$

这里 $\sum_\rho$ 表示对 $L(s, \chi)$ 的所有非显明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ $(0 < \beta < 1)$ 求和.

引理 12 (Dirichlet) 对于任意实数 x 及 $y \geqslant 1$，一定存在二个整数 h, q，$(h, q) = 1$，$1 \leqslant q \leqslant y$，使得

---

1) 关于 L 函数的例外零点，例外特征，参看第十章引理 6 及引理 7. 这里是对应于引理 6 的情形.

$$|qx-h|<\frac{1}{y}. \tag{31}$$

证　考虑下面 $[y]+2$ 个数

$$1,\quad kx-[kx],\quad k=0,1,\cdots,[y].$$

显然这 $[y]+2$ 个数都位于区间 $[0,1]$ 中，因而其中一定有二个数，它们之间的距离不超过 $\frac{1}{[y]+1}$. 如果这二个数为

$$k_1x-[k_1x],\quad k_2x-[k_2x],\quad 0\leqslant k_1<k_2\leqslant[y],$$

则有

$$|(k_2x-[k_2x])-(k_1x-[k_1x])|=|(k_2-k_1)x$$
$$-([k_2x]-[k_1x])|\leqslant\frac{1}{[y]+1}<\frac{1}{y}.$$

所以可取

$$q=\frac{q'}{(q',h')},\qquad h=\frac{h'}{(q',h')},$$

这里 $q'=k_2-k_1$, $h'=[k_2x]-[k_1x]$. 如果这二个数为

$$kx-[kx],\quad 1,\quad 0<k\leqslant[y]$$

（容易看出一定有 $k>0$），则有

$$|kx-[kx]-1|=|kx-([kx]+1)|\leqslant\frac{1}{[y]+1}<\frac{1}{y},$$

所以可取

$$q=\frac{q''}{(q'',h'')},\qquad h=\frac{h''}{(q'',h'')},$$

这里 $q''=k$, $h''=[kx]+1$. 证毕.

对任一实数 α 及 $x\geqslant1$，我们设

$$S^{(2)}(\alpha,x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n).$$

定理 3　设 h, q 为二整数，$x\geqslant4$ 并满足

$$(h,q)=1,\quad 1\leqslant q\leqslant x,$$

则

$$S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, x\right) \ll \left(x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{10}} + x q^{-\frac{1}{2}}\right) \log^{12} x.$$

证 我们有

$$S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, x\right) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) e\left(\frac{h}{q} n\right) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)>1}} \Lambda(n) e\left(\frac{h}{q} n\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q} l\right) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l(q)}} \Lambda(n) + O(\log^2 x)$$

$$= \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q} n\right) \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \bar{\chi}(l)$$

$$\times \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n) + O(\log^2 x)$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \chi(h) \tau(\bar{\chi}) \psi(x, \chi) + O(\log^2 x)$$

$$\ll \frac{\log q}{\sqrt{q}} \sum_{\chi} |\psi(x, \chi)| + O(\log^2 x), \tag{32}$$

上式最后一步用到了 $|\tau(\bar{\chi})| \leqslant \sqrt{q}$ 及 $\phi(q) \gg \frac{q}{\log q}$. 在引理11中取 $T = x^{\frac{1}{2}}$, 则由 L 函数零点的基本性质(参看第十章引理5,引理6)及(30)式可得

$$|\psi(x, \chi)| \ll E_0 x + \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant x^{\frac{1}{2}} \\ \beta > \frac{1}{2}}} \frac{x^{\beta}}{(1 + |\gamma|)} + x^{\frac{1}{2}} \log^2 x. \tag{33}$$

由此即得

$$\sum_{\chi} |\psi(x, \chi)| \ll x + \sum_{\chi} \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant x^{\frac{1}{2}} \\ \beta > \frac{1}{2}}} \frac{x^{\beta}}{(1 + |\gamma|)} + x^{\frac{1}{2}} q \log^2 x$$

$$\ll x + \sum_{2 \leqslant 2^j \leqslant 2x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^j} \sum_{\chi} \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 2^j \\ \beta > \frac{1}{2}}} x^{\beta} + x^{\frac{1}{2}} q \log^2 x$$

$$= x + \sum_{2 \leqslant 2^j \leqslant 2x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^j} \left(-\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\sigma} d_{\sigma} N(\sigma, 2^j, q)\right)$$

$$+ x^{\frac{1}{2}} q \log^2 x, \tag{34}$$

其中 $N(\sigma, 2^j, q)$ 由第四章(4)式确定。我们有

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\sigma} d_{\sigma} N(\sigma, A, q) = x^{\frac{1}{2}} N\left(\frac{1}{2}, A, q\right)$$

$$+ \log x \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\sigma} N(\sigma, A, q) d\sigma,$$

由第四章定理 1 易得,当 $A \geqslant 2$ 时

$$N(\sigma, A, q) \ll \begin{cases} (qA)^{\frac{5-4\sigma}{3}} \log^9 qA, & \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{4}{5}; \\ (qA)^{3(1-\sigma)} \log^9 qA, & \frac{4}{5} \leqslant \sigma \leqslant 1. \end{cases}$$

所以当 $q \leqslant x$, $A \ll x$ 时有

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\sigma} d_{\sigma} N(\sigma, A, q) \ll x^{\frac{1}{2}} qA \log x + \log^{10} x \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} x^{\sigma} (qA)^{\frac{5-4\sigma}{3}} d\sigma$$

$$+ \log^{10} x \int_{\frac{4}{5}}^{1} x^{\sigma} (qA)^{3(1-\sigma)} d\sigma$$

$$\ll \left(x^{\frac{1}{2}}(qA) + x^{\frac{4}{5}}(qA)^{\frac{3}{5}} + x\right) \log^{10} x,$$

由此及(34)式得

$$\sum_{\chi} |\psi(x, \chi)| \ll \left(x^{\frac{1}{2}} q + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{3}{5}} + x\right) \log^{11} x. \tag{35}$$

由此及(32)式即得(31)式证毕。

推论 3 设实数 α 由(10)式给出,则在定理 3 的条件下有

$$S^{(2)}(\alpha, x) \ll \left(x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{3}{10}} + x^{\frac{9}{10}} q^{-\frac{1}{10}} + x q^{-\frac{1}{2}}\right) \log^{12} x. \tag{36}$$

证 设 $\alpha = \frac{h}{q} + z$, 我们有

$$S^{(2)}(\alpha, x) = \int_{1}^{x} e(zt) dS^{(2)}\left(\frac{h}{q}, t\right) = S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, x\right) e(zx)$$

$$- 2\pi i z \int_{1}^{x} S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, t\right) e(zt) dt, \tag{37}$$

由此及定理 3 得

$$S^{(2)}(\alpha, x) \ll (1 + |z| x)\left(x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{3}{10}} + x q^{-\frac{1}{2}}\right) \log^{12} x. \tag{38}$$

若

$$|z|x \leqslant 2,$$

则由(38)式立即推出(36)式成立. 不然,一定有

$$\frac{2}{x} \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

故得

$$q \leqslant \frac{x}{2q}.$$

由引理12知,一定存在二个整数 $q', h', (q', h') = 1, 1 \leqslant q' \leqslant \frac{x}{q}$,使

$$\left|\alpha - \frac{h'}{q'}\right| \leqslant \frac{q}{xq'}. \tag{39}$$

设 $\alpha = \frac{h'}{q'} + z'$, 由前二式得

$$|z'| \leqslant \frac{1}{2qq'},$$

显然不能有 $q = q'$, $h = h'$ 成立,故有

$$\frac{1}{qq'} \leqslant \left|\frac{h}{q} - \frac{h'}{q'}\right| \leqslant |z| + |z'| \leqslant \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2qq'},$$

即

$$\frac{q}{2} \leqslant q'. \tag{40}$$

综合以上结果得

$$\frac{q}{2} \leqslant q' \leqslant \frac{x}{q}.$$

由此及定理3得

$$S^{(2)}\left(\frac{h'}{q'}, x\right) \ll (x^{\frac{1}{2}}q'^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}}q'^{\frac{1}{10}} + xq'^{-\frac{1}{2}})\log^{12}x$$

$$\ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{9}{10}}q^{-\frac{1}{10}})\log^{12}x.$$

与(37),(38)式的推导类似,由此可得

$$S^{(2)}(\alpha, x) \ll (1 + |z'|x)(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{9}{10}}q^{-\frac{1}{10}}) \log^{12} x.$$

而由 (39), (40) 式得

$$|z'|x \leqslant 2.$$

由以上两式亦推得 (36) 式成立，证毕。

由推论 3，利用熟知的方法可得

推论 4 在推论 3 的条件和符号下，有

$$S^{(1)}(\alpha, x) = \sum_{p \leqslant x} \log p e(\alpha p) \ll (x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{10}} + x^{\frac{9}{10}}q^{-\frac{1}{10}} + xq^{-\frac{1}{2}}) \log^{12} x, \tag{41}$$

及

$$S(\alpha, x) = \sum_{p \leqslant x} e(\alpha p) \ll (x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{10}} + x^{\frac{9}{10}}q^{-\frac{1}{10}} + xq^{-\frac{1}{2}}) \log^{11} x. \tag{42}$$

由推论 4 直接推出

推论 5 在推论 3 的条件和符号下，若有 $R \leqslant q \leqslant xR^{-1}$, $1 \leqslant R \leqslant x^{\frac{1}{4}}$, 则

$$S^{(2)}(\alpha, x) \ll xR^{-\frac{1}{2}} \log^{12} x, \tag{43}$$

$$S^{(1)}(\alpha, x) \ll xR^{-\frac{1}{2}} \log^{12} x \tag{44}$$

及

$$S(\alpha, x) \ll xR^{-\frac{1}{2}} \log^{11} x. \tag{45}$$

附注 容易看出，本节所得的所有估计，对充分大的 x，仅当 $\log^{24} x \leqslant q \leqslant x \log^{-24} x$ 时，才是有效的非显然估计。对推论 5 来说，亦即需要 $\log^{24} x \leqslant R \leqslant x^{1/4}$.

§3. 复变积分法[91]

本节将在初等数论及 L 函数的一些熟知的初等结果的基础上，利用复变积分法得到关于线性素变数三角和 (1) 的估计，这是比零点密度估计方法要简单得多的一个分析证明[1)].

1) Vaughan[127] 亦附带给出了这种三角和的估计，但他要用到 L 函数的四次中值公式.

定理 4 设 $x \geqslant 2$,

$$S^{(3)}(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n} e(\alpha n), \tag{46}$$

若 $(q, h) = 1$, $1 \leqslant q \leqslant x$, 则

$$S^{(3)}\left(\frac{h}{q}, x\right) \ll x q^{-\frac{1}{2}} \log^{10} x + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{13}{2}} x. \tag{47}$$

证 当 $(q, h) = 1$ 时有

$$S^{(3)}\left(\frac{h}{q}, x\right) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)>1}}$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \tau(\bar{\chi}) \chi(h) \psi_1(x, \chi) + O(\log^2 x \log q),$$

其中

$$\psi_1(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \chi(n) \log \frac{x}{n}. \tag{48}$$

利用 $\phi(q) \geqslant q \log^{-1} q$, $|\tau(\chi)| \leqslant \sqrt{q}$ 及 $q \leqslant x$ 得

$$S^{(3)}\left(\frac{h}{q}, x\right) \ll \frac{\log q}{q} \psi_1(x, \chi^0)$$

$$+ \frac{\log q}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\psi_1(x, \chi)| + \log^3 x. \tag{49}$$

熟知对任意的 $a > 1$ 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{y^s}{s^2} ds = \begin{cases} \log y, & y \geqslant 1, \\ 0, & 0 < y < 1, \end{cases}$$

这里对任一实数 λ, $\int_{(\lambda)} = \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty}$. 现取 $a = 1 + \frac{1}{\log x}$, 易得

$$\psi_1(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s^2} ds. \tag{50}$$

设 $A = x^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{3}{2}} x$,

$$M(s, \chi) = \sum_{n \leqslant A} \mu(n) \chi(n) n^{-s},$$

再设 $B = [6 \log^2 x]$, 则当 $\operatorname{Re} s = a = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时显然有

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=f_1(s,\chi)+f_2(s,\chi)+O(x^{-3}),\qquad(51)$$

其中

$$f_1(s,\chi)=\sum_{n\leqslant A}\Lambda(n)\chi(n)n^{-s},\qquad(52)$$

$$f_2(s,\chi)=\sum_{A<n\leqslant 2^BA}\Lambda(n)\chi(n)n^{-s}.\qquad(53)$$

利用关系式

$$-\frac{L'}{L}=-\frac{L'}{L}(1-LM)-L'M,\qquad(54)$$

我们就得到，当 $\mathrm{Re}\, s=a$ 时有

$$-\frac{L'}{L}=f_1(1-LM)+f_2(1-LM)-L'M+O(x^{-2}).\quad(55)$$

因而由此及 (50) 式可得

$$\psi_1(x,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}(f_2(1-LM)+f_1$$

$$-f_1LM-L'M)\frac{x^s}{s^2}ds+O(x^{-1}).\qquad(56)$$

当 $\chi\neq\chi^0$ 时，可以把对 $f_1, f_1LM, L'M$ 的积分的线路移至 $\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}$，得到

$$\begin{aligned}\psi_1(x,\chi)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}f_2(1-LM)\frac{x^s}{s^2}ds\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{2})}(f_1-f_1LM-L'M)\frac{x^s}{s^2}ds+O(x^{-1})\\&\ll x\int_{(a)}|f_2(1-LM)|\frac{|ds|}{|s^2|}\\&\quad+x^{\frac{1}{2}}\int_{(\frac{1}{2})}(|f_1|+|f_1LM|+|L'M|)\frac{|ds|}{|s|^2}\\&\quad+O(x^{-1}).\end{aligned}\qquad(57)$$

利用 Schwarz 不等式，由上式即得

$$\sum_{\chi\neq\chi^0}|\psi_1(x,\chi)|\ll x\sup_{\mathrm{Re}\,s=a}\left(\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|f_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|1-LM|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|f_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+x^{\frac{1}{2}}\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|f_1|^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|M|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\times\int_{(\frac{1}{2})}\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|L|^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|ds|}{|s|^2}$$

$$+x^{\frac{1}{2}}\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|M|^2\right)^{\frac{1}{2}}\int_{(\frac{1}{2})}\left(\sum_{\chi\neq\chi^0}|L'|^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|ds|}{|s|^2}. \qquad (58)$$

利用第二章定理 2 立即推出下面的一些估计:

[1] $\sum_{\chi}\left|f_1\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2\ll(q+A)\log^3 x$

[2] $\sum_{\chi}\left|M\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2\ll(q+A)\log x$

[3] 由于

$$f_1^2(s,\chi)=\sum_{n\leqslant A^2}a_n\chi(n)n^{-s},\quad |a_n|\leqslant d(n)\log n$$

再利用第三章引理 2 即得

$$\sum_{\chi}\left|f_1\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4\ll(q+A^2)\log^8 x$$

[4] 由于

$$M^2(s,\chi)=\sum_{n\leqslant A^2}b_n\chi(n)n^{-s},\quad |b_n|\leqslant d(n)$$

故再利用第三章引理 2 即得

$$\sum_{\chi}\left|M\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4\ll(q+A^2)\log^4 x$$

[5] 当 $\mathrm{Re}\,s=a=1+\frac{1}{\log x}$ 时有

$$\sum_{\chi}|f_2(s,\chi)|^2=\sum_{\chi}\left|\sum_{j=0}^{B-1}\sum_{2^jA<n\leqslant 2^{j+1}A}\Lambda(n)\chi(n)n^{-s}\right|^2$$

$$\leqslant B \sum_{j=0}^{B-1} \sum_{\chi} \left| \sum_{2^j A < n \leqslant 2^{j+1} A} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s} \right|^2$$

$$\leqslant \log^2 x \sum_{j=0}^{B-1} (q + 2^j A) \sum_{2^j A < n \leqslant 2^{j+1} A} \frac{\Lambda^2(n)}{n^2}$$

$$\ll \left(\frac{q}{A} + \log^2 x\right) \log^6 x.$$

[6] 易知当 $\mathrm{Re}\, s = a = 1 + \dfrac{1}{\log x}$ 时有

$$1 - LM = \sum_{A < n \leqslant 2^B A} c_n \chi(n) n^{-s} + O(x^{-1}), \quad |c_n| \leqslant d(n).$$

和 [5] 一样，并利用第三章引理 2 即得

$$\sum_{\chi} |1 - LM|^2 \ll \left(\frac{q}{A} + \log^2 x\right) \log^8 x.$$

另外，我们利用第三章定理 8 可以得到

[7]

$$\int_{(\frac{1}{2})} \left(\sum_{\chi} |L|^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|ds|}{|s|^2} \ll \sqrt{q} \log q.$$

[8]

$$\int_{(\frac{1}{2})} \left(\sum_{\chi} |L'|^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|ds|}{|s|^2} \ll \sqrt{q} \log^2 q.$$

把以上所得的估计 [1]—[8] 代入 (58) 式，并注意到

$$A = x^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{5}{2}} x$$

及 $A^2 > q$，即得

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} |\psi_1(x, \chi)| \ll x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (q + A^2)^{\frac{1}{2}} \log^4 x + xq/A \log^7 x$$

$$+ x \log^9 x \ll x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{11}{2}} x + x \log^9 x,$$

由此及显然估计 $\psi_1(x, \chi^0) \ll x \log^2 x$，由(49)式即得(47)式，证毕。

容易看出，对充分大的 x，估计式(47)仅当 $\log^{20} x \leqslant q \leqslant x \log^{-26} x$ 时才得到有效的非显然估计。由此及定理 4 直接推得

推论 6 设 $x\geqslant 2$, $(q,h)=1$, $\log^{26}x\leqslant R\leqslant q\leqslant xR^{-1}$, 则

$$S^{(3)}\left(\frac{h}{q},x\right)\ll xR^{-\frac{1}{4}}\log^{\frac{13}{2}}x. \tag{59}$$

由推论 6 可以证明

推论 7 设 $x\geqslant 2$, $(q,h)=1$, $\log^{30}x\leqslant R\leqslant q\leqslant xR^{-1}$, 则

$$S^{(2)}\left(\frac{h}{q},x\right)\ll xR^{-\frac{1}{8}}\log^{\frac{15}{4}}x. \tag{60}$$

证 设 $0<\lambda<1$, $\lambda x\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}S^{(3)}\left(\frac{h}{q},x+\lambda x\right)-S^{(3)}\left(\frac{h}{q},x\right)\\&=\log(1+\lambda)S^{(2)}\left(\frac{h}{q},x\right)\\&\quad+\sum_{x<n\leqslant(1+\lambda)x}\Lambda(n)\log\frac{x+\lambda x}{n}e\left(\frac{h}{q}n\right),\end{aligned}$$

由此及推论 6 得到

$$\log(1+\lambda)S^{(2)}\left(\frac{h}{q},x\right)\ll xR^{-\frac{1}{4}}\log^{\frac{13}{2}}x+\lambda x\log(1+\lambda)\log x.$$

由此及

$$\lambda\geqslant\log(1+\lambda)=\int_1^{1+\lambda}\frac{dx}{x}\geqslant\frac{\lambda}{2}$$

得

$$S^{(2)}\left(\frac{h}{q},x\right)\ll\lambda^{-1}xR^{-\frac{1}{4}}\log^{\frac{13}{2}}x+\lambda x\log x.$$

取 $\lambda=R^{-\frac{1}{8}}\log^{\frac{11}{4}}x$, 由上式即得 (60) 式, 证毕.

推论 8 设实数 α 由 (10) 式给出, $x\geqslant 2$, $\log^{60}x\leqslant R\leqslant q\leqslant xR^{-1}$, 则

$$S^{(2)}(\alpha,x)\ll xR^{-\frac{1}{16}}\log^{\frac{15}{4}}x. \tag{61}$$

证 证明和推论 3 相同. 设 $\alpha=\frac{h}{q}+z$, 我们有

$$S^{(2)}(\alpha,x)=\int_1^x e(zt)dS^{(2)}\left(\frac{h}{q},t\right)=S^{(2)}\left(\frac{h}{q},x\right)e(zx)$$

$$- 2\pi iz\int_1^x S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, t\right)e(zt)dt$$

$$= S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, x\right)e(zx) - 2\pi iz\int_1^{xR^{-\frac{1}{2}}} - 2\pi iz\int_{xR^{-\frac{1}{2}}}^x,$$

因 $\log^{30} x \leqslant R^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant (xR^{-\frac{1}{2}})R^{-\frac{1}{2}}$，由推论 7 得

$$\int_{xR^{-\frac{1}{2}}}^x S^{(2)}\left(\frac{h}{q}, t\right)e(zt)dt \ll x^2R^{-\frac{1}{16}}\log^{\frac{15}{4}} x.$$

由以上两式即得

$$S^{(2)}(\alpha, x) \ll (1 + |z|x)xR^{-\frac{1}{16}}\log^{\frac{15}{4}} x.$$

以下的证明和推论 3 的证明中 (38) 式以下的推导完全一样，可推得 (61) 式成立，只要注意到这里将有

$$\frac{R}{2} \leqslant \frac{q}{2} \leqslant q' \leqslant \frac{x}{q} \leqslant xR^{-1}.$$

证明过程就不详细写出来了.

利用熟知的方法，可得

推论 9 在推论 8 的条件和符号下，有

$$S^{(1)}(\alpha, x) \ll xR^{-\frac{1}{16}}\log^{\frac{15}{4}} x \tag{62}$$

及

$$S(\alpha, x) \ll xR^{-\frac{1}{16}}\log^{\frac{11}{4}} x. \tag{63}$$

§4. 对小 q 的线性素变数三角和估计

前面三节得到的所有估计，都需要在 $q \geqslant \log^c x$ (c 为某一常数)时才是有效的非显然估计，对于小的 $q \leqslant \log^c x$，这些估计都是无用的，但为了求出三素数定理中的常数 N_0 (即：当奇数 $N \geqslant N_0$ 时，就一定可表为三个奇素数之和)，就需要对这种情形得到一个有效的非显然估计.

引理 13 设 $x \geqslant 2$，整数 $q \geqslant 1$ 及 $(l, q) = 1$，则

$$\pi(x; q, l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(q)}} 1 = \frac{\mathrm{Li}x}{\phi(q)} - \tilde{E}\,\frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)}\int_2^x \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt + \gamma(x), \tag{64}$$

其中

$$\gamma(x) \ll x e^{-c_1\sqrt{\log x}},$$

$\tilde{E}=1$，若对模 q 存在例外特征 $\tilde{\chi}$ 及例外零点 $\tilde{\beta}$，其它情形 $\tilde{E}=0$[1]。

证明见 [60，IX，§3 定理 6]或 [24，第 20 章][2]。

定理 5 设 $\alpha=\frac{h}{q}+z$，$(q,h)=1$，一定存在一个正数 $\varepsilon_0>0$，使对任意的 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 及 $x\geqslant 2$，当

$$xe^{-\varepsilon\sqrt{\log x}}\leqslant A\leqslant x,\quad q\leqslant e^{\varepsilon\sqrt{\log x}},\quad |zx|\leqslant e^{\varepsilon\sqrt{\log x}}$$

时，有

$$\sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p)\ll\frac{A\log\log q}{\sqrt{q}\log x}\min\left(1,\frac{1}{A|z|}\right). \tag{65}$$

证 利用引理 13，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{x-A<p\leqslant x} e(\alpha p) &= \sum_{\substack{x-A<p\leqslant x\\(p,q)=1}} e(\alpha p)+O(\nu_1(q))\\
&=\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q}l\right)\sum_{\substack{x-A<p\leqslant x\\p\equiv l(q)}} e(zp)+O(\nu_1(q))\\
&=\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q}l\right)\int_{x-A}^{x} e(zt)d\pi(t;q,l)+O(\nu_1(q))\\
&=\frac{1}{\phi(q)}\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q}l\right)\int_{x-A}^{x}\left(\frac{1}{\log t}-\tilde{E}\tilde{\chi}(l)\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\right)\\
&\quad\times e(zt)dt+\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q}l\right)\\
&\quad\times\int_{x-A}^{x} e(zt)d\gamma(t)+O(\nu_1(q))\\
&=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\int_{x-A}^{x}\frac{e(zt)}{\log t}dt-\frac{\tilde{E}}{\phi(q)}\chi_1(h)\tau(\tilde{\chi})
\end{aligned}$$

1）关于例外零点、例外特征，参看第十章引理 6 .

2）那里是对 $\psi(x;q,l)$ 来证明的，二者是一样的.

$$\times \int_{x-A}^{x} \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t} e(zt)dt + O(\phi(q)xe^{-c_1\sqrt{\log x}})$$

$$+ O(\phi(q)|z|xAe^{-c_1\sqrt{\log x}}) + O(\nu_1(q)). \qquad (66)$$

下面来估计上式中的两个积分.

若 $x-A<\sqrt{x}$, 即 $A>x-\sqrt{x}$, 利用第二积分中值定理我们有

$$\int_{x-A}^{x} \frac{e(zt)}{\log t} dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e(zt)}{\log t} dt + O(\sqrt{x})$$

$$\ll \frac{1}{\log x} \max_{\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x} \left|\int_{\sqrt{x}}^{y} e(zt)dt\right| + O(\sqrt{x})$$

$$\ll \frac{1}{\log x} \min\left(x-\sqrt{x}, \frac{1}{|z|}\right) + O(\sqrt{x})$$

$$\ll \frac{1}{\log x} \min\left(A, \frac{A}{A|z|}\right) + O(\sqrt{x})$$

$$\ll \frac{A}{\log x} \min\left(1, \frac{1}{A|z|}\right). \qquad (67)$$

若 $x-A\geqslant\sqrt{x}$, 则亦有

$$\int_{x-A}^{x} \frac{e(zt)}{\log t} dt \ll \frac{1}{\log x} \max_{x-A\leqslant y\leqslant x} \left|\int_{x-A}^{y} e(zt)dt\right|$$

$$\ll \frac{A}{\log x} \min\left(1, \frac{1}{A|z|}\right). \qquad (68)$$

用同样的方法可得

$$\int_{x-A}^{x} \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t} e(zt)dt \ll \frac{A}{\log x} \min\left(1, \frac{1}{A|z|}\right). \qquad (69)$$

因为 $c_1>0$ 是一绝对常数,所以只要 ε_0 取得适当小, 利用 $|\tau(\chi)|\leqslant\sqrt{q}$, $\phi(q)\gg\frac{q}{\log\log q}$, 由(66)—(69)及定理的条件, 容易推出(65)式成立,证毕.

同样可以证明

定理 5 在定理 5 的条件和符号下,有

$$\sum_{x-A<p\leqslant x} \log p e(\alpha p) \ll \frac{A \log\log q}{\sqrt{q}} \min\left(1, \frac{1}{A|z|}\right), \quad (70)$$

及

$$\sum_{x-A<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll \frac{A \log\log q}{\sqrt{q}} \min\left(1, \frac{1}{A|z|}\right). \quad (71)$$

第六章　三素数定理

这一章主要是讨论关于奇数的 Goldbach 猜想. 这一问题早在 1937 年首先由 И. М. Виноградов[132] 基本解决了. 他得到了奇数N表为三个奇素数之和的表法个数的渐近公式,并由此推出:存在一个绝对常数 c_1,使得每一个奇数 $N \geqslant c_1$ 一定可以表为三个奇素数之和. 这一结果通常称为 Goldbach-Виноградов 定理,亦叫做三素数定理. 在引言中我们已对这一问题的研究历史作了较为详细的说明.本章将对这一定理给出两个证明,一个证明(见§2)要简单些,但由此不能具体定出常数 c_1; 另一个证明(见§3)将能具体定出 c_1. 在§1中,我们将首先对圆法的思想作一简单的讨论.

本章还将证明二个有关的结果. 在§4(定理3)我们将证明:每一个充分大的奇数一定可以表为三个几乎相等的奇素数之和. 一些作者[44],[84],[17]研究过这一问题,并得出了比这里更强的结果. 在§5(定理4)我们将证明华罗庚[47]的结果: 对任意的正整数 k,每一个充分大的奇数一定可以表为二个奇素数及一个奇素数的 k 次方之和.

§1. Goldbach 问题中的圆法

设N为一正整数, $T(N)$ 表示方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3 \tag{1}$$

的解数,这里 $p_i(i = 1, 2, 3)$ 取奇素数. 设 α 为一实数,

$$S(\alpha, N) = \sum_{2 < p \leqslant N} e(\alpha p). \tag{2}$$

由于对任意整数 l 有

$$\int_0^1 e(l\alpha) d\alpha = \begin{cases} 1, & l = 0; \\ 0, & l \neq 0, \end{cases}$$

故得

$$T(N)=\int_0^1 S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)d\alpha. \tag{3}$$

设 Q,τ 为二正数. $1<Q<\tau<N$. 由于 $S(\alpha, N)$ 是周期为 1 的周期函数,所以有

$$T(N)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)d\alpha. \tag{4}$$

考虑 Farey 数列

$$\frac{h}{q},\quad 0\leqslant h<q,\quad (h, q)=1,\quad 1\leqslant q\leqslant Q, \tag{5}$$

及相应的一组小区间[1)]

$$I(q, h)=\left[\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}, \frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}\right],$$

$$0\leqslant h<q,\quad (h, q)=1,\quad 1\leqslant q\leqslant Q. \tag{6}$$

显然当

$$2Q<\tau \tag{7}$$

时,所有这些小区间都在区间 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right]$ 内,并当

$$2Q^2<\tau \tag{8}$$

时,由于对 Farey 数列中任意两个不同的数 $\frac{h_1}{q_1}, \frac{h_2}{q_2}$ 有

$$\left|\frac{h_1}{q_1}-\frac{h_2}{q_2}\right|\geqslant\frac{1}{q_1q_2}\geqslant\frac{1}{Q^2}>\frac{2}{\tau},$$

因而,所有这些小区间 $I(q, h)$ 是两两不相交的. 令

$$E_1=\bigcup_{1\leqslant q\leqslant Q}\ \bigcup_{\substack{0\leqslant h\leqslant q-1\\(h,q)=1}} I(q, h) \tag{9}$$

及

1) 有时我们考虑更小的区间 $I(q, h)=\left[\frac{h}{q}-\frac{1}{q\tau}, \frac{h}{q}+\frac{1}{q\tau}\right]$, 这时仅需满足条件 (7), 这些小区间就两两不相交.

$$E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right] \Big\backslash E_1. \tag{10}$$

我们把 E_1 称为基本区间，E_2 为余区间，这样就有

$$T(N) = T_1(N) + T_2(N), \tag{11}$$

其中

$$T_1(N) = \int_{E_1} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)d\alpha, \tag{12}$$

$$T_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)d\alpha. \tag{13}$$

对集合 E_2 中的点，有下述性质:

引理 1 对任一 $\alpha \in E_2$，一定存在两个整数 q, h，满足条件

$$(h, q) = 1, \quad Q < q \leqslant \tau, \tag{14}$$

使

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}. \tag{15}$$

证 在第五章引理 12 中取 $x = \alpha$, $y = \tau$，则必有 q, h，满足条件

$$(h, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau$$

使

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| < \frac{1}{q\tau} \leqslant \frac{1}{\tau}.$$

若 $q \leqslant Q$，则由上式知，必有 $\alpha \in E_1$，这和假设矛盾，故必有

$$q > Q,$$

证毕.

引理 1 表明余区间 E_2 中的每一点都是“接近”（距离小于 $\frac{1}{\tau}$）于一个分母“较大”（大于 Q）的既约分数，而基本区间 E_1 中的每一点，按定义知都是“接近”$\left(距离小于 \frac{1}{\tau}\right)$于一个分母“较小”（小于 Q）的既约分数. Hardy-Littlewood 首先猜测，线性素变数三角和 $S(\alpha, N)$ 当 α“接近”于一个分母“较小”的既约分数时，取“较大”的值，而当 α“接近”于一个分母“较大”的既约分数时取“较小”的值.

因而 $T(N)$ 的主要部分是在基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N)$，而在余区间 E_2 上的积分 $T_2(N)$ 是可以忽略的次要项. 这就是 Hardy-Littlewood 所提出的圆法的思想. 为了实现这一方法，就要选取适当的 Q 及 τ，一方面要计算 $T(N)$ 的主要部分，即积分

$$T_1(N)=\int_{E_1} S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)d\alpha,$$

另一方面，要估计积分

$$T_2(N)=\int_{E_2} S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)d\alpha,$$

并证明它相对于 $T_1(N)$ 来说是可以忽略的次要项. 计算主要项 $T_1(N)$ 的困难，可以利用 Siegel-Walfisz 定理（见下面引理 2）或 Page 定理（见下面引理 7）来克服. 利用 Siegel-Walfisz 定理，证明要简单些，但由此不能定出常数 c_1，所以称这种方法为“非实效方法”，我们将在 § 2 中讨论这一方法. 利用 Page 定理将使证明复杂一些，但可以定出常数 c_1，所以称这种方法为“实效方法”，我们将在 § 3 中讨论这一方法. 估计次要项 $T_2(N)$ 的困难，主要在于估计三角和 (2)，这一问题我们已在第五章中解决了，并给出了三种不同的证明方法.

§ 2. 非实效方法

设 λ_1, λ_2 是二个适当选取的正数，现取

$$Q=\log^{\lambda_1}N, \quad \tau=N\log^{-\lambda_2}N. \tag{16}$$

当 N 足够大时，条件 (8) 显然满足，这样，就相应地由 (9), (10) 式确定了集合 E_1, E_2.

首先，我们来计算基本区间 E_1 上积分 $T_1(N)$.

引理 2 (Siegel-Walfisz) 设 $x\geqslant 2$，则对任意固定的正数 $A>1$，及任意的整数 q, l

$$1\leqslant q\leqslant \log^A x, \quad (l, q)=1$$

有渐近公式

$$\psi(x;q,l)=\frac{x}{\phi(q)}+O(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}),\tag{17}$$

$$\pi(x;q,l)=\frac{\mathrm{Li}\,x}{\phi(q)}+O(xe^{-c_2\sqrt{\log x}})\tag{18}$$

成立，其中常数 c_2 仅依赖于 A，且 O 常数是一绝对常数[1)]，

证明可见[24]，[29]，[60]，[81]，[92]等．但这里的常数 c_2 是不能实际计算出来的．

引理 3 设实数 $\alpha=\frac{h}{q}+z\in I(q,h)\subset E_1$，则有

$$S(\alpha,N)=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{\log n}+O(Ne^{-c_3\sqrt{\log N}}).\tag{19}$$

证 我们有

$$\begin{aligned}S(\alpha,N)&=\sum_{\substack{2<p\leqslant N\\(p,q)=1}}e\left(\left(\frac{h}{q}+z\right)p\right)+O(\log q)\\&=\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{h}{q}l\right)\sum_{\substack{2<p\leqslant N\\p\equiv l(N)}}e(zp)+O(\log q)\\&=\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{h}{q}l\right)\int_2^N e(zt)d\pi(t;q,l)+O(\log q).\end{aligned}\tag{20}$$

由引理 2 知，当 $q\leqslant Q=\log^{\lambda_1}N$ 时，有

$$\pi(t;q,l)=\frac{\mathrm{Li}\,t}{\phi(q)}+\gamma(t),\quad t\geqslant 2,\quad (l,q)=1,$$

其中

$$\gamma(t)\ll te^{-c_2\sqrt{\log t}},\quad t\geqslant 2.$$

所以

$$\int_2^N e(zt)d\pi(t;q,l)=\frac{1}{\phi(q)}\int_2^N\frac{e(zt)}{\log t}dt+\int_2^N e(zt)d\gamma(t).$$

由于这里 $|z|\leqslant\tau^{-1}=N^{-1}\log^{\lambda_2}N$，所以

---

1) 亦可以证明：常数 c_2 是一绝对常数，而大 O 常数仅依赖于 A，这时的大 O 常数亦是不能计算出来的．

$$\int_2^N e(zt)d\gamma(t) \ll Ne^{-c_3\sqrt{\log N}} + |z|\int_2^N |\gamma(t)|dt$$

$$\ll Ne^{-c_4\sqrt{\log N}}.$$

由以上两式及(20)式即得

$$S(\alpha, N) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\int_2^N \frac{e(zt)}{\log t}dt + O(Ne^{-c_4\sqrt{\log N}}). \qquad (21)$$

此外我们有

$$\int_2^N \frac{e(zt)}{\log t}dt - \sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{\log n} = \sum_{n=2}^{N-1}\int_n^{n+1}\left(\frac{e(zt)}{\log t} - \frac{e(zn)}{\log n}\right)dt$$

$$= \sum_{n=2}^{N-1}\int_n^{n+1}\left(\int_n^t d\left(\frac{e(zu)}{\log u}\right)\right)dt = \sum_{n=2}^{N-1}\int_n^{n+1}\left(\int_n^t\left(\frac{-e(zu)}{u\log^2 u}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\pi ize(zu)}{\log u}\right)du\right)dt \ll \sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{1}{n\log^2 n} + \frac{|z|}{\log n}\right)$$

$$\ll 1 + \frac{N}{\log N}|z| \ll 1 + (\log N)^{\lambda_2 - 1}.$$

这里亦用到了 $|z| \leqslant \tau^{-1} = N^{-1}\log^{\lambda_2} N$. 由此及(21)式,即得(19)式,证毕.

引理 4 设正整数 $N \geqslant 2$, 则级数

$$\mathfrak{S}_3(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N) \qquad (22)$$

绝对收敛,其中 $C_q(-N)$ 为 Ramanujan 和(第一章(18')),且有

$$\mathfrak{S}_3(N) = \prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right), \qquad (23)$$

及

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N) = \mathfrak{S}_3(N) + O(Q^{-1}(\log\log Q)^2). \qquad (24)$$

证 由于

$$\left|\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N)\right| \leqslant \frac{1}{\phi^2(q)} \ll q^{-2}(\log\log q)^2,$$

所以(22)式右边级数绝对收敛,并由上式即推出(24)式. 再因

为 $\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N)$ 是 q 的可乘函数,所以

$$\mathfrak{S}_3(N) = \prod_p \left(1 - \frac{C_p(-N)}{(p-1)^3}\right)$$

而

$$C_p(-N) = \begin{cases} p-1, & p\mid N; \\ -1, & p\nmid N, \end{cases}$$

由以上二式即得 (23) 式,证毕.

推论 1 当 N 为偶数时,

$$\mathfrak{S}_3(N) = 0, \tag{25}$$

当 N 为奇数时,

$$\mathfrak{S}_3(N) > \frac{1}{2}. \tag{26}$$

证 (25) 式是显然的. 下面来证明 (26) 式. 由 (23) 式知,当 N 为奇数时,有

$$\mathfrak{S}_3(N) > \prod_{p\mid N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{n\geq 3}\left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2},$$

证毕.

引理 5 当 $\lambda_1 \geq 2$, $\lambda_2 \geq 2$ 时,我们有

$$T_1(N) = \frac{1}{2}\mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right). \tag{27}$$

证 由引理 3 容易推出,当 $\alpha \in I(q, h)$ 时,

$$S^3(\alpha, N) = \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^3 + O(N^3 e^{-c_3\sqrt{\log N}}),$$

其中 $\alpha = \frac{h}{q} + z$. 因而我们有

$$T_1(N) = \sum_{1\leq q\leq Q}\sum_{h=0}^{q-1}{}' \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)d\alpha$$

$$= \sum_{1\leq q\leq Q}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^3$$

$$\times e(-zN)dz + O(N^2 e^{-c_5\sqrt{\log N}}). \tag{28}$$

利用熟知的估计

$$\sum_{n=2}^{N-1} e(zn) \ll \min\left(N, \frac{1}{\langle z\rangle}\right), \tag{29}$$

$$\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n} \ll \min\left(\frac{N}{\log N}, \frac{1}{\langle z\rangle \log N}\right), \quad \langle z\rangle < N^{-\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

及

$$\left|\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n} - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right)$$
$$= \int_2^N \frac{dt}{\log t} - \frac{N}{\log N} + O(1) \ll \frac{N}{\log^2 N}, \tag{31}$$

我们可得

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left[\left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n}\right)^3 - \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N}\right)^3\right] e(-zN)dz$$
$$\ll \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left|\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n} - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N}\right|$$
$$\times \left(\left|\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n}\right|^2 + \left|\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N}\right|^2\right) dz$$
$$\ll \frac{N}{\log^2 N} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left[\min\left(\frac{N}{\log N}, \frac{1}{|z| \log N}\right)\right]^2 dz$$
$$\ll \frac{N}{\log^2 N}\left(\int_0^{\frac{1}{N}} \frac{N^2}{\log^2 N} dz + \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{1}{\tau}} \frac{dz}{z^2 \log^2 N}\right) \ll \frac{N^2}{\log^4 N}.$$

由此及引理 4，从 (28) 式推得

$$T_1(N) = \frac{1}{\log^3 N}\left(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q} \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)} C_q(-N)\right)$$
$$\times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{n=2}^{N-1} e(zn)\right)^3 e(-zN)dz + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right). \tag{32}$$

利用估计 (29) 式易得

$$\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N-1} e(zn)\right)^3 e(-zN)dz \ll \int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3} \ll \tau^2$$

及

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N-1} e(zn)\right)^3 e(-zN)dz \ll \tau^2.$$

当 $\lambda_2 \geqslant 2$ 时，由以上两式，从 (32) 式立即得到

$$T_1(N) = \frac{1}{\log^3 N}\left(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q} \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)} C_q(-N)\right)$$
$$\times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N-1} e(zn)\right)^3 e(-zN)dz + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right). \quad (33)$$

再利用等式

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N-1} e(zn)\right)^3 e(-zN)dz = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N\\ 2\leqslant n_1,n_2,n_3\leqslant N-1}} 1$$
$$= \frac{N^2}{2} + O(N),$$

由 (33) 式及引理 4 推得

$$T_1(N) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q} \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)} C_q(-N)\right)$$
$$\times \frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right). \quad (34)$$

当 $\lambda_1 \geqslant 2$ 时，由此及 (24) 式即得 (27) 式，证毕。

其次，我们来估计余区间 E_2 上的积分 $T_2(N)$。

引理 6 适当选取正数 λ_1, λ_2, 可使当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^3 N}, \quad (35)$$

及

$$T_2(N) \ll \frac{N^2}{\log^4 N}. \quad (36)$$

证 若利用第五章定理 1，则选取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$，这时，由引理 1 及第五章 (18) 式推出 (35) 式成立，进而得到

$$T_2(N) \ll \frac{N}{\log^3 N}\int_0^1 |S^2(\alpha, N)|\,d\alpha$$
$$= \frac{N}{\log^3 N}\int_0^1 \sum_{2<p_1,\, p_2\leqslant N} e((p_1 - p_2)\alpha)\,d\alpha \ll \frac{N^2}{\log^4 N},$$

这就证明了 (36) 式.

若利用第五章定理 3 推论 5，则选取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 30$，这时，由引理 1 及第五章 (45) 式亦推出 (35) 式成立，由此和上面一样可推出(36)式.

若利用第五章定理 4 推论 9，则选取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 92$，这时，由引理 1 及第五章 (63) 式亦推出 (35) 式成立，同样由此可得 (36) 式. 证毕.

由引理 5，引理 6，引理 4 推论 1 及 (11) 式立即得到下面的定理及推论.

定理 1 对于奇数N表为三个奇素数之和的表法个数 $T(N)$ 有渐近公式

$$T(N) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_3(N)\,\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \tag{37}$$

成立，其中 $\mathfrak{S}_3(N)$ 由 (23) 式确定且

$$\mathfrak{S}_3(N) > \frac{1}{2}.$$

推论 2 存在一个绝对常数 c_1，使得每一个奇数 $N \geqslant c_1$ 一定可以表为三个奇素数之和.

这样就证明了三素数定理，但由于我们利用了 Siegel-Walfisz 定理，因而这里的常数 c_1 是不能实际计算出来的.

§3. 实 效 方 法

本节将利用 Page 定理代替 Siegel-Walfisz 定理来计算基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N)$，由此推出 §2 中的结果，且使得其中的常数是可以计算的.

现在我们取

$$Q = \log^3 N, \quad \tau = N \log^{-\lambda_2} N, \tag{38}$$

其中 λ_2 为一适当的正常数，当 N 足够大时，条件 (8) 满足，这样亦由 (9)，(10) 式相应地确定了基本区间 E_1 及余区间 E_2.

首先，我们来计算基本区间 E_1 上的积分.

引理 7 (Page) 设 $x \geqslant y > 3$，则对所有的模 $q \leqslant y$，可能除去一些"例外模" q——这些 q 一定是某一个可能存在的 $q_0(q_0 \gg \log^2 y\,(\log\log y)^{-8})$ 的倍数——以外，当 $(q, l) = 1$ 时有

$$\pi(x; q, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\phi(q)} + O(xe^{-c_6\sqrt{\log x}}) + O\left(xe^{-c_6\frac{\log x}{\log y}}\right), \tag{39}$$

成立，这里的大 O 常数及 c_6 都是绝对的可计算的常数.

证明见 [60, IX, 定理 6, 推论 3].

引理 8 当 $\lambda_2 \geqslant 2$ 时，我们有

$$T_1(N) = \frac{1}{2}\mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^{3.4} N}\right), \tag{40}$$

其中大 O 常数是可以计算的绝对常数.

证 在引理 7 中取

$$y = \exp\left(\frac{\log N}{(\log\log N)^2}\right),$$

显然，当 N 足够大时有

$$\log^3 N < y < \sqrt{N}, \tag{41}$$

以及若引理 7 中的 q_0 存在的话必有

$$q_0 \gg \log^2 N\,(\log\log N)^{-12}. \tag{42}$$

故当 $y < \sqrt{N} \leqslant x \leqslant N$，$1 \leqslant q \leqslant y$，$q_0 \nmid q$，$(q, l) = 1$ 时，由引理 7 知必有

$$\pi(x; q, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\phi(q)} + O(xe^{-c_7(\log\log x)^2}). \tag{43}$$

故当 $q \leqslant \log^3 N$，$q_0 \nmid q$，$|z| \leqslant \frac{1}{\tau}$ 时有

$$\sum_{\substack{2 < p \leqslant N \\ p \equiv l(q)}} e(zp) = \int_{\sqrt{N}}^{N} e(zt)\,d\pi(t; q, l) + O(\sqrt{N})$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \int_{\sqrt{N}}^{N} \frac{e(zt)}{\log t} dt + O(Ne^{-c_6(\log\log N)^2})$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \int_{2}^{N} \frac{e(zt)}{\log t} dt + O(Ne^{-c_6(\log\log N)^2}). \qquad (44)$$

和引理 3 的推导完全相类似，可证明：当 $\alpha \in E_1$，$\alpha = \frac{h}{q} + z$，$q \leqslant \log^3 N$，$q_0 \nmid q$，$(h, q) = 1$，$|z| \leqslant \frac{1}{\tau}$ 时有

$$S(\alpha, N) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n} + O(Ne^{-c_6(\log\log N)^2}). \qquad (45)$$

由此出发，和推导引理 5 中的 (34) 式完全相类似可得

$$\sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 \nmid q}} \sum_{h=0}^{q-1}{}' \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N) e(-\alpha N) d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 \nmid q}} \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)} C_q(-N) \right) \frac{N^2}{\log^3 N}$$

$$+ O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right), \qquad (46)$$

这里出现的常数都是绝对的可计算的常数.

取 $\varepsilon < 0.05$ 为一固定的充分小的正数，由第五章定理 5 知，当 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q, h) \subset E_1$，$q_0 | q$，$q \leqslant \log^3 N$ 时有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N \log\log q}{\sqrt{q} \log N} \min\left(1, \frac{1}{N|z|}\right), \qquad (47)$$

由此可得

$$\sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 | q}} \sum_{h=0}^{q-1}{}' \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N) e(-\alpha N) d\alpha$$

$$\ll \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 | q}} \phi(q) \frac{N^3 (\log\log q)^3}{q\sqrt{q} \log^3 N} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\min\left(1, \frac{1}{N|z|}\right)\right)^3 dz$$

$$\ll \frac{N^2}{\log^{3-\varepsilon} N} \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 | q}} \frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{N^2}{\sqrt{q_0} \log^{3-\varepsilon} N} \sum_{1 \leqslant d \leqslant \frac{\log^3 N}{q_0}} \frac{1}{\sqrt{d}}$$

$$\ll \frac{N^2}{q_0 \log^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N} \ll \frac{N^2}{\log^{3.4} N}. \tag{48}$$

上式最后一步用到了：当N充分大时，$q_0 \gg \log^{2-\varepsilon} N$，以及选取$\varepsilon < 0.05$.

此外，我们有

$$\sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 | q}} \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)} C_q(-N) \ll \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 | q}} \frac{1}{\phi^2(q)}$$

$$\ll \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant \log^3 N \\ q_0 | q}} \frac{(\log\log\log N)^2}{q^2}$$

$$\ll \frac{(\log\log\log N)^2}{q_0^2} \ll \frac{1}{\log^{4-3\varepsilon} N}, \tag{49}$$

由 (46)，(48) 及 (49) 式即得 (39) 式，证毕。

引理 9 适当选取正数λ_2，可使当$\alpha \in E_2$时有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^{2.4} N}, \tag{50}$$

及

$$T_2(N) \ll \frac{N^2}{\log^{3.4} N}. \tag{51}$$

证 由引理 1 知，对任一$\alpha \in E_2$，一定存在二个整数q，h，满足条件

$$(h, q) = 1, \quad \log^3 N < q \leqslant N \log^{-\lambda_2} N$$

使

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

当

$$\log^{\lambda_2} N \leqslant q \leqslant N \log^{-\lambda_2} N$$

时，和引理 6 的证明一样，若利用第五章定理 1，则取$\lambda_2 = 10$；若利用第五章定理 3 推论 5，则取$\lambda_2 = 30$；若利用第五章定理 4 推论 9，则取$\lambda_2 = 92$，可得

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^3 N}; \tag{52}$$

而当

$$\log^3 N < q \leqslant \log^{92} N$$

时，由第五章定理 5 推得

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^{2.4} N}. \tag{53}$$

由 (52)，(53) 式就得到了 (50) 式，由此容易推出 (51) 式，证毕.

由引理 8，引理 9，引理 4 推论 1 及(11)式立即得到下面的定理及推论

定理 2 对于奇数 N 表为三个奇素数之和的表法个数 $T(N)$ 有渐近公式

$$T(N) = \frac{1}{2} \mathfrak{S}_3(N) \frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^{3.4} N}\right) \tag{54}$$

成立，其中 $\mathfrak{S}_3(N)$ 由 (23) 式确定，且

$$\mathfrak{S}_3(N) > \frac{1}{2}.$$

此外，这里的 O 常数是可以计算的绝对常数.

推论 3 存在一个可计算的绝对正常数 c_9，使得每一个奇数 $N \geqslant c_9$ 一定可以表为三个奇素数之和.

附注 在 Goldbach 猜想以及其它许多解析数论问题的研究中，往往利用各种加权三角和，例如

$$S^{(1)}(\alpha, N) = \sum_{1<p\leqslant N} \log p e(\alpha p), \tag{55}$$

或

$$S^{(2)}(\alpha, N) = \sum_{1<n\leqslant N} \Lambda(n) e(\alpha n) \tag{56}$$

来代替 $S(\alpha, N)$，这样做的好处在于可以直接和 L 函数相联系而利用 L 函数的性质来进行研究. 这时相应的积分

$$T^{(1)}(N) = \int_0^1 (S^{(1)}(\alpha, N))^3 e(-\alpha N) d\alpha$$

$$= \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=N \\ 2<p_1,\, p_2,\, p_3 \leqslant N}} \log p_1 \log p_2 \log p_3, \tag{57}$$

及

$$\begin{aligned} T^{(2)}(N) &= \int_0^1 (S^{(2)}(\alpha, N))^3 e(-\alpha N)\, d\alpha \\ &= \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N \\ 2<n_1,\, n_2,\, n_3 \leqslant N}} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3). \end{aligned} \tag{58}$$

并且容易证明 $T(N)$, $T^{(1)}(N)$, $T^{(2)}(N)$ 之间有下述关系式成立:

$$T^{(2)}(N) = T^{(1)}(N) + O(N^{3/2}\log^4 N), \tag{59}$$

$$T(N) = \left(1 + O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right)\frac{T^{(1)}(N)}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^\eta N}\right), \tag{60}$$

其中 η 为一任意大于 4 的常数.

§4. 奇数表为三个几乎相等的奇素数之和

定理 3 存在一个绝对正常数 c_{10}，使得每一个奇数 $N \geqslant c_{10}$ 一定可以表为三个几乎相等的奇素数之和，即对于奇数 $N \geqslant c_{10}$，方程

$$\begin{cases} N = p_1 + p_2 + p_3 \\ p_i \sim \dfrac{N}{3}, \qquad\qquad i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{61}$$

有解.

证　证明的方法和定理 1 完全一样，所不同的只是对余区间上的积分估计这里要用第五章定理 2 来代替原来所用的第五章定理 1.

设 N 为足够大的奇数，$\varepsilon > 0$ 为一充分小的常数. 令

$$A = Ne^{-\varepsilon\sqrt{\log N}}.$$

现在我们取

$$Q = \log^{12} N, \quad \tau = A^2 N^{-1} Q^{-1}. \tag{62}$$

当 N 足够大，ε 充分小时，条件 (8) 显然满足，这就同样由 (9)，(10) 式相应地确定了基本区间 E_1 及余区间 E_2.

设

$$T(N; A) = \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=N \\ \frac{N}{3}-A<p_1, p_2, p_3\leqslant\frac{N}{3}+A}} 1, \tag{63}$$

$$S(\alpha; N, A) = \sum_{\frac{N}{3}-A<p\leqslant\frac{N}{3}+A} e(\alpha p). \tag{64}$$

我们有

$$T(N; A) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha; N, A)e(-\alpha N)d\alpha$$
$$= T_1(N; A) + T_2(N; A), \tag{65}$$

其中

$$T_1(N; A) = \int_{E_1} S^3(\alpha; N, A)e(-\alpha N)d\alpha, \tag{66}$$

$$T_2(N; A) = \int_{E_2} S^3(\alpha; N, A)e(-\alpha N)d\alpha. \tag{67}$$

我们先来估计余区间 E_2 上的积分 $T_2(N; A)$. 由引理 1 及第五章定理 2 知,当 $\alpha\in E_2$ 时有

$$S(\alpha; N, A) \ll \frac{A}{\log^3 N}. \tag{68}$$

由此及素数定理易得

$$T_2(N; A) \ll \frac{A}{\log^3 N}\int_0^1 |S(\alpha; N, A)|^2 d\alpha \ll \frac{A^2}{\log^4 N}. \tag{69}$$

下面我们来计算基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N; A)$. 所用的方法和 §2 中计算 $T_1(N)$ 的方法 (即引理 3, 引理 4, 引理 5) 完全一样. 所要注意的是我们这里 ε 是一个可以取得任意小的正常数.

首先, 类似于引理 3 的讨论可得, 当 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q, h) \subset E_1$ 时有

$$S(\alpha; N, A) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A} \frac{e(zn)}{\log n} + O(Ae^{-c_{11}\sqrt{\log N}}), \tag{70}$$

由此易得

$$S^3(\alpha;\ N,\ A)=\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}\Big(\sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A}\frac{e(zn)}{\log n}\Big)^3$$

$$+\ O(A^3e^{-c_{11}\sqrt{\log N}}).\qquad(71)$$

其次,和引理 5 的讨论一样,只要利用估计

$$\sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A}e(zn)\ll\min\Big(A,\ \frac{1}{\langle z\rangle}\Big)$$

$$\sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A}\frac{e(zn)}{\log n}\ll\min\Big(\frac{A}{\log N},\ \frac{1}{\langle z\rangle\log N}\Big)$$

及

$$\Big|\sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A}\frac{e(zn)}{\log n}-\sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A}\frac{e(zn)}{\log N}\Big|\ll\frac{A}{\log^2 N}$$

来代替引理 5 中的 (29), (30) 及 (31), 可得

$$T_1(N;\ A)=\Big(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N)\Big)$$

$$\times\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\Big(\sum_{\frac{N}{3}-A<n\leqslant\frac{N}{3}+A}\frac{e(zn)}{\log N}\Big)^3e(-zN)dz$$

$$+\ O(A^2e^{-c_{11}\sqrt{\log N}})$$

$$=\frac{1}{\log^3 N}\Big(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N)\Big)$$

$$\times\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N\\ \frac{N}{3}-A<n_1,\ n_2,\ n_3\leqslant\frac{N}{3}+A}}1+O\Big(\frac{A^2}{\log^4 N}\Big).\qquad(72)$$

此外,我们有

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N\\ \frac{N}{3}-A<n_1,\ n_2,\ n_3\leqslant\frac{N}{3}+A}}1=\sum_{\frac{N}{3}-A<n_1\leqslant\frac{N}{3}}\ \sum_{\substack{n_2+n_3=N-n_1\\ \frac{N}{3}-A<n_2,\ n_3\leqslant\frac{N}{3}+A}}1$$

$$+\sum_{\frac{N}{3}<n_1\leqslant\frac{N}{3}+A}\ \sum_{\substack{n_2+n_3=N-n_1\\ \frac{N}{3}-A<n_2,\ n_3\leqslant\frac{N}{3}+A}}1$$

$$=\sum_{0\leqslant d_1<A}\ \sum_{\substack{d_2+d_3=d_1\\ -A<d_2,\ d_3\leqslant A}}1+\sum_{0<d_1\leqslant A}\ \sum_{\substack{d_2+d_3=-d_1\\ -A<d_2,\ d_3\leqslant A}}1$$

$$= \sum_{0\leqslant d_1<A}(2A-d_1)+\sum_{0<d_1\leqslant A}(2A-d_1)$$

$$+O(A)=3A^2+O(A). \tag{73}$$

从以上二式及引理 4 即得(这里 $Q=\log^{12}N$)

$$T_1(N;A)=\left(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(-N)\right)\frac{3A^2}{\log^3N}+O\left(\frac{A^2}{\log^4N}\right)$$

$$=\mathfrak{S}_3(N)\frac{3A^2}{\log^3N}+O\left(\frac{A^2}{\log^4N}\right). \tag{74}$$

由 (69), (74) 及 (65) 式,我们就推出

$$T(N;A)=\mathfrak{S}_3(N)\frac{3A^2}{\log^3N}+O\left(\frac{A^2}{\log^4N}\right). \tag{75}$$

这样,我们就得到了方程

$$\begin{cases}N=p_1+p_2+p_3\\ \frac{N}{3}-A<p_i\leqslant\frac{N}{3}+A, \quad i=1,2,3\end{cases}$$

的解数的渐近公式. 这里, 当 N 为奇数时, 由引理 4 推论 1 知 $\mathfrak{S}_3(N)>\frac{1}{2}$. 这就不但证明了我们的定理,而且也得到了表法个数的渐近公式,及

$$p_i=\frac{N}{3}+O(Ne^{-c\sqrt{\log N}})\sim\frac{N}{3}, \quad 1\leqslant i\leqslant 3.$$

证毕.

§5. $N=p_1+p_2+p_3^k$

本节我们要证明华罗庚[47]的结果: 设 k 为一给定的正整数, 则充分大的奇数一定可以表为二个奇素数和一个奇素数的 k 次方之和. 当 $k=1$ 时,就是三素数定理. 设

$$S_k(\alpha,N)=\sum_{2<p\leqslant N^{\frac{1}{k}}}e(\alpha p^k), \tag{76}$$

则方程

$$N=p_1+p_2+p_3^k, \quad (p_i>2, \quad i=1,2,3)$$

的解数

$$T_k(N)=\int_0^1 S^2(\alpha,N)S_k(\alpha,N)e(-N\alpha)d\alpha.$$

和证明三素数定理一样，我们将应用圆法导出 $T_k(N)$ 的渐近公式，并由此推得所要的结果. 证明的过程原则上和 §2 一样，但这里更为复杂并需要克服一些新的困难，这都是由于需要讨论非线性素变数三角和(76)式所引起的.

为此，我们先来证明一些引理.

引理 10 设整数 $k\geqslant 1$,

$$C_q(a,k)=\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{a}{q}l^k\right).$$

我们有:

(i). 若 $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, 则

$$C_q(a,k)=C_{q_1}(aq_2^{k-1},k)C_{q_2}(aq_1^{k-1},k); \tag{77}$$

(ii). 设

$$B_q(N,k)=\sum_{a=1}^{q}{}' C_q(a,k)e\left(-\frac{a}{q}N\right), \tag{78}$$

则 $B_q(N,k)$ 是 q 的可乘函数.

证 我们有

$$C_q(a,k)=\sum_{l_1=1}^{q_1}{}'\sum_{l_2=1}^{q_2}{}' e\left(\frac{a}{q}(q_2l_1+q_1l_2)^k\right)$$

$$=\sum_{l_1=1}^{q_1}{}'\sum_{l_2=1}^{q_2}{}' e\left(\frac{a}{q}(q_2^kl_1^k+q_1^kl_2^k)\right),$$

由此即得(77). 现来证明(ii). 设 $q_1q_2=q$, $(q_1,q_2)=1$, 利用(77)我们有

$$B_q(N,k)=\sum_{a=1}^{q}{}' C_{q_1}(aq_2^{k-1},k)C_{q_2}(aq_1^{k-1},k)e\left(-\frac{a}{q}N\right)$$

$$=\sum_{a_1=1}^{q_1}{}'\sum_{a_2=1}^{q_2}{}' C_{q_1}(a_1q_2^k,k), C_{q_2}(a_2q_1^k,k)$$

$$\times e\left(-\frac{a_1}{q_1}N\right)e\left(-\frac{a_2}{q_2}N\right).$$

再因为从 $(q_1, q_2)=1$ 可得

$$C_{q_1}(a_1q_2^k, k)=\sum_{l=1}^{q_1}{}' e\left(\frac{a_1}{q_1}(lq_2)^k\right)=C_{q_1}(a_1, k)$$

以及

$$C_{q_2}(a_2q_1^k, k)=C_{q_2}(a_2, k).$$

由以上三式即得

$$B_q(N, k)=B_{q_1}(N, k)B_{q_2}(N, k).$$

这就证明了 (ii)，证毕.

引理 11 设 p 为素数,整数 $k\geqslant 1$，整数 a，$(a,p)=1$，以及 $d=(k, p-1)$，我们有

$$\left|\sum_{l=1}^{p} e\left(\frac{a}{p}l^k\right)\right|\leqslant(d-1)\sqrt{p}. \tag{79}$$

证 设 g 为素数 p 的最小正原根，$(n, p)=1$，以 $\operatorname{ind} n$ 表示以 g 为底的 n 对模 p 的指标，熟知，当 $d|p-1$ 时，n 为模 p 的 d 次非剩余的充要条件是:

$$\sum_{j=1}^{d} e\left(\frac{\operatorname{ind} n}{d}j\right)=0; \tag{80}$$

以及，当 $d|p-1$，n 为模 p 的 d 次剩余的充要条件是

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} e\left(\frac{\operatorname{ind} n}{d}j\right)=1, \tag{81}$$

且这时

$$x^d\equiv n(p)$$

对模 p 有 d 个解[1]. 现设

$$\chi(m)=\begin{cases} e\left(\dfrac{\operatorname{ind} m}{p-1}\right), & p\nmid m,\\ 0, & p|m.\end{cases}$$

---

1) 有关原根，指标，剩余及非剩余的知识可参看 [51]，[80]，[137].

这是模 p 的一个特征，且模 p 的全部特征为

$$\chi(m),\ \chi^2(m),\ \cdots,\ \chi^{p-1}(m).$$

由于同余式

$$x^k \equiv n(p),\quad p\nmid n$$

当 n 为模 p 的 d 次非剩余时无解，而当 n 为模 p 的 d 次剩余时对模 p 有 d 个解，故由 (80)，(81) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{p} e\left(\frac{a}{p} l^k\right) &= 1 + \sum_{l=1}^{p-1} e\left(\frac{a}{p} l^k\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{p-1} e\left(\frac{a}{p} n\right) \sum_{j=1}^{d} e\left(\frac{\operatorname{ind} n}{d} j\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{p-1} e\left(\frac{a}{p} n\right) \sum_{j=1}^{d} (\chi(m))^{\frac{p-1}{d} j} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=1}^{p-1} (\chi(n))^{\frac{p-1}{d} j} e\left(\frac{a}{p} n\right).\end{aligned}$$

由第一章引理 3 的推论及引理 6 知：

$$\left|\sum_{n=1}^{p-1} (\chi(n))^{\frac{p-1}{d} j} e\left(\frac{a}{p} n\right)\right| \leqslant \sqrt{p},\quad 1 \leqslant j \leqslant d-1$$

及

$$\sum_{n=1}^{p-1} (\chi(n))^{\frac{p-1}{d} d} e\left(\frac{a}{p} n\right) = \sum_{n=1}^{p-1} e\left(\frac{a}{p} n\right) = -1.$$

综合以上三式即得 (79) 式，证毕.

推论 4 在引理 11 的条件下，我们有

$$|C_p(a, k)| < d\sqrt{p}. \tag{82}$$

引理 12 设 p 为素数，整数 $k \geqslant 1$，$p^s \| k$，令

$$r = \begin{cases} s+2, & p = 2, \\ s+1, & p > 2. \end{cases}$$

则当整数 $t > r$ 时，有

$$C_{p^t}(a, k) = 0,\quad (a, p) = 1. \tag{83}$$

证 设 $l = l_1 + l_2 p^{t-(s+1)}$，我们有

$$C_{p^t}(a, k) = \sum_{l_1=1}^{p^{t-(s+1)}}{}' \sum_{l_2=1}^{p^{s+1}} e\left(\frac{a}{p^t}(l_1 + l_2 p^{t-(s+1)})^k\right)$$

$$= \sum_{l_1=1}^{p^{t-(s+1)}}{}' \sum_{l_2=1}^{p^{s+1}} e\left(\frac{a}{p^t}(l_1^k + k l_1^{k-1} l_2 p^{t-(s+1)})\right)$$

$$= \sum_{l_1=1}^{p^{t-(s+1)}}{}' e\left(\frac{a}{p^t} l_1^k\right) \sum_{l_2=1}^{p^{s+1}} e\left(\frac{ak l_1^{k-1}}{p^{s+1}} l_2\right) = 0,$$

证毕。

引理 13 对任意小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$C_q(a, k) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad (a, q) = 1, \tag{84}$$

这里的≪常数仅依赖于 k 及 ε。

证 设 q 的标准分解式为 $p_1^{t_1}\cdots p_h^{t_h}$，令 $a_j = a\left(\frac{q}{p_j^{t_j}}\right)^{k-1}$，$1 \leqslant j \leqslant h$，由引理 10，(77) 式得

$$C_q(a, k) = \prod_{j=1}^{h} C_{p_j^{t_j}}(a_j, k)$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \mid k}}^{h} C_{p_j^{t_j}}(a_j, k) \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k}}^{h} C_{p_j^{t_j}}(a_j, k). \tag{85}$$

由引理 12 知，当 $p_j \mid k$ 时，设 $p_j^{s_j} \| k$，$(s_j \geqslant 1)$，我们一定有

$$|C_{p_j^{t_j}}(a_j, k)| \leqslant p_j^{s_j+1} \leqslant p_j^{2s_j}, \quad p_j > 2,$$

及

$$|C_{p_j^{t_j}}(a_j, k)| \leqslant 2^{s_j+2} \leqslant 2p_j^{2s_j}, \quad p_j = 2.$$

故有

$$\left|\prod_{\substack{j=1 \\ p_j \mid k}}^{h} C_{p_j^{t_j}}(a_j, k)\right| \leqslant 2k^2.$$

另一方面，当 $p_j \nmid k$ 时，由引理 12（这时 $s = 0$）及引理 11 推论 4 得（设 $d_j = (k, p_j - 1)$）

$$\left|\prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k}}^{h} C_{p_j^{t_j}}(a_j, k)\right| \ll \left|\prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k, p_j \neq 2}}^{h} C_{p_j}(a_j, k)\right|$$

$$= \left| \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k,\, p_j \neq 2 \\ p_j \leqslant k^{1/\varepsilon}}}^{h} C_{p_j}(a_j, k) \right| \left| \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k,\, p_j \neq 2 \\ p_j > k^{1/\varepsilon}}}^{h} C_{p_j}(a_j, k) \right|$$

$$\leqslant \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k,\, p_j \neq 2 \\ p_j \leqslant k^{1/\varepsilon}}}^{h} d_j \sqrt{p_j} \prod_{\substack{j=1 \\ p_j \nmid k,\, p_j \neq 2 \\ p_j > k^{1/\varepsilon}}}^{h} d_j \sqrt{p_j} \ll_{k,\varepsilon} q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

由以上两式即得(84)式，证毕。

引理 14 设 k 为正整数，则级数

$$\mathfrak{S}_3(N, k) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)} B_q(N, k) \tag{86}$$

绝对收敛，且有

$$\mathfrak{S}_3(N, k) = \prod_{p} \left(1 + \frac{B_p(N, k)}{(p-1)^3}\right), \tag{87}$$

及对任意小正数 ε 有

$$\sum_{1 \leqslant q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)} B_q(N, k) = \mathfrak{S}_3(N, k) + O(Q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{88}$$

证 由引理 13 知，对任意小的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\left| \frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)} B_q(N, k) \right| \ll \frac{q^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{\phi^2(q)} \ll q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

这就证明了(86)式右边的级数绝对收敛且有(88)式成立。由此及引理 10 (ii) 即得(87)式，证毕。

推论 5 当 N 为偶数时，

$$\mathfrak{S}_3(N, k) = 0, \tag{89}$$

当 N 为奇数时，

$$\mathfrak{S}_3(N, k) > 0. \tag{90}$$

证 当 N 为偶数时，$2 \mid N$，这时有

$$B_2(N, k) = -1,$$

故由(88)式知必有 $\mathfrak{S}(N, k) = 0$. 当 $2 \nmid N$ 时，有

$$B_2(N, k) = 1$$

以及

$$|B_p(N,k)| \leqslant (p-1)^2,$$

故当 $p \geqslant 3$ 时，总有

$$1+\frac{B_p(N,k)}{(p-1)^3} \geqslant 1-\frac{1}{p-1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

由于无穷乘积(88)式绝对收敛，故由此推得(90)式，证毕.

为了估计三角和(76)式，我们需要下面的引理.

引理 15 (Виноградов) 设实数 $\alpha=\frac{h}{q}+z$, $|z| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(q,h)=1$，再设 $\lambda_0>0$ 为任一实数，则当 $\lambda \geqslant 2^{6k}(1+\lambda_0)$ 时，对 $\log^\lambda N \leqslant q \leqslant N\log^{-\lambda} N$ 有

$$S_k(\alpha, N) \ll N^{\frac{1}{k}} \log^{-\lambda_0} N. \tag{91}$$

这一结果是属于 И. М. Виноградов 的，它的证明亦是利用第五章§1所介绍的 Виноградов 三角和方法，这里就不证明了，可参看[133]，[134]及[48，定理 10].

现在，应用圆法来证明我们的定理. 设 λ 为一适当选取的正常数，取

$$Q=\log^\lambda N, \quad \tau=NQ^{-1}=N\log^{-\lambda} N. \tag{92}$$

当 N 足够大时，条件(8)满足，故亦由(9)，(10)式相应地确定了基本区间 E_1 及余区间 E_2. 并有

$$\begin{aligned} T_k(N) &= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, N) S_k(\alpha, N) e(-N\alpha)\,d\alpha \\ &= T_{k,1}(N)+T_{k,2}(N), \end{aligned} \tag{93}$$

其中

$$T_{k,1}(N)=\int_{E_1} S^2(\alpha, N) S_k(\alpha, N) e(-N\alpha)\,d\alpha, \tag{94}$$

$$T_{k,2}(N)=\int_{E_2} S^2(\alpha, N) S_k(\alpha, N) e(-N\alpha)\,d\alpha. \tag{95}$$

利用引理 15 马上就得出余区间 E_2 上的积分 $T_{k,2}(N)$ 的估计：

引理 16 当 $\lambda \geqslant 2^{6k+2}$ 时，有

$$T_{k,2}(N) \ll \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}. \tag{96}$$

证　由引理 15 得

$$T_{k,2}(N) \ll \frac{N^{\frac{1}{k}}}{\log^3 N}\int_0^1 |S(\alpha, N)|^2 d\alpha \ll \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N},$$

证毕.

下面我们来计算基本区间 E_1 上的积分 $T_{k,1}(N)$.

引理 17　设 z 为实数，$k \geqslant 1$, $N \geqslant 2$, 则有

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{e(zn)}{n^{1-1/k}} \ll_k \min\left(N^{\frac{1}{k}}, \langle z\rangle^{-\frac{1}{k}}\right), \tag{97}$$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}\log n} \ll_k \min\left(\frac{N^{\frac{1}{k}}}{\log N}, \frac{\langle z\rangle^{-\frac{1}{k}}}{\log N}\right), \quad \langle z\rangle \leqslant N^{-\frac{1}{2}}. \tag{98}$$

证　我们有

$$\left|\sum_{n=2}^{N} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} \ll_k N^{\frac{1}{k}},$$

以及 $\langle z\rangle \neq 0$ 时，利用 Abel 求和及估计 (29) 式，有

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n\leqslant\frac{1}{\langle z\rangle}} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}} + \sum_{\frac{1}{\langle z\rangle}<n\leqslant N} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$\ll_k \langle z\rangle^{-\frac{1}{k}} + \langle z\rangle^{1-\frac{1}{k}}\frac{1}{\langle z\rangle} \ll_k \langle z\rangle^{-\frac{1}{k}}.$$

这就证明了 (97) 式，由 (97) 式立即推得 (98) 式，证毕.

引理 18　设实数 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q, h) \subset E_1$, 我们有

$$S_k(\alpha, N) = \frac{C_q(h, k)}{\phi(q)} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}\log n} + O\left(N^{\frac{1}{k}} e^{-c_{12}\sqrt{\log N}}\right). \tag{99}$$

证　我们有

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q} l^k\right) \sum_{\substack{2<p\leqslant N^{\frac{1}{k}} \\ p\equiv l(q)}} e(zp^k) + O(\log q).$$

和引理 3 的证明类似，利用引理 2 有

$$\sum_{\substack{2<p\leqslant N^{\frac{1}{k}}\\ p\equiv l(q)}} e(zp^k) = \int_2^{N^{\frac{1}{k}}} e(zt^k)d\pi(t;q,l)$$

$$= \frac{1}{\phi(q)}\int_2^{N^{\frac{1}{k}}} \frac{e(zt^k)}{\log t}dt + O(N^{\frac{1}{k}}e^{-c_{13}\sqrt{\log N}})$$

$$= \frac{1}{\phi(q)}\int_{2^k}^{N} \frac{e(zv)}{(\log v)v^{1-\frac{1}{k}}}dv + O(N^{\frac{1}{k}}e^{-c_{13}\sqrt{\log N}})$$

$$= \frac{1}{\phi(q)}\int_{2}^{N} \frac{e(zv)}{v^{1-\frac{1}{k}}\log v}dv + O(N^{\frac{1}{k}}e^{-c_{13}\sqrt{\log N}})$$

$$= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}\log n} + O(N^{\frac{1}{k}}e^{-c_{13}\sqrt{\log N}}),$$

由此即得(99)式,证毕.

引理 19 当 $\lambda\geqslant 3$ 时,我们有

$$T_{k,1}(N) = \frac{k^2}{k+1}\mathfrak{S}_3(N,k)\frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}\right). \quad (100)$$

证 由引理 3, 引理 18 及引理 14, 我们有

$$T_{k,1}(N) = \sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{h=0}^{q-1}{}' \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha,N)S_k(N,\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$$

$$= \sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)}B_q(N,k)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^2$$

$$\times\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}\log n}\right)e(-zN)dz$$

$$+ O(N^{1+\frac{1}{k}}e^{-c_{13}\sqrt{\log N}}). \quad (101)$$

由于

$$\left|\sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}\log n} - \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}\log N}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right)$$

$$= \int_2^N \frac{1}{t^{1-\frac{1}{k}}} \left(\frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log N} \right) dt + O(1)$$

$$= k \int_2^N \frac{t^{\frac{1}{k}}}{t \log^2 t} dt + O(1) \ll_k \frac{N^{\frac{1}{k}}}{\log^2 N},$$

由此及(29),(30),(31)式,再利用引理17可得

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \Bigg[\left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n} \right)^2 \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}} \log n} \right)$$

$$- \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N} \right)^2 \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}} \log N} \right) \Bigg] e(-zN) dz$$

$$= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}} \log n} \right) \Bigg[\left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log n} \right)^2$$

$$- \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N} \right)^2 \Bigg] e(-zN) dz$$

$$+ \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{\log N} \right)^2 \Bigg[\sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}} \log n}$$

$$- \sum_{n=2}^{N-1} \frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}} \log N} \Bigg] e(-zN) dz$$

$$\ll \frac{N}{\log^2 N} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \min \left(\frac{N^{\frac{1}{k}}}{\log N}, \frac{|z|^{-\frac{1}{k}}}{\log N} \right)$$

$$\times \min \left(\frac{N}{\log N}, \frac{|z|^{-1}}{\log N} \right) dz$$

$$+ \frac{N^{\frac{1}{k}}}{\log^2 N} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \min \left(\frac{N^2}{\log^2 N}, \frac{|z|^{2}}{\log^2 N} \right) dz \ll \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}.$$

由此及引理14,从(101)式推得

$$T_{k,1}(N) = \frac{1}{\log^3 N} \sum_{1 \leqslant q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)} B_q(N, k) \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{n=2}^{N-1} e(zn) \right)^2$$

$$\times\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)e(-zN)dz + O(N^{1+\frac{1}{k}}\log^{-4}N). \tag{102}$$

由引理 17，(29) 式及 $\lambda \geqslant 1$ 可得

$$\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N-1}e(zn)\right)^2\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)e(-zN)dz$$

$$\ll \int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{|z|^{2+\frac{1}{k}}} \ll \tau^{1+\frac{1}{k}} \ll \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log N},$$

同样有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N-1}e(zn)\right)^2\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)e(-zN)dz \ll \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log N}.$$

由以上二式及引理 14，从 (102) 式即得

$$T_{k,1}(N) = \frac{1}{\log^3 N}\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)}B_q(N,k)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N-1}e(zn)\right)^2$$

$$\times\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)e(-zN)dz + O\left(\frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}\right). \tag{103}$$

下面我们来计算积分

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N-1}e(zn)\right)^2\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{e(zn)}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)e(-zN)dz$$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N\\ 2<n_1,\,n_2,\,n_3\leqslant N-1}}\frac{1}{n_3^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{2<n\leqslant N-1}\frac{1}{n_3^{1-\frac{1}{k}}}\sum_{\substack{n_1+n_2=N-n_3\\ 2<n_1,\,n_2\leqslant N-1}}1$$

$$= \sum_{2<n_3\leqslant N-1}\frac{N-n_3}{n_3^{1-\frac{1}{k}}} + O(N) = N\int_2^N\frac{dt}{t^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$-\int_2^N t^{\frac{1}{k}}dt + O(N) = \frac{k^2}{k+1}N^{1+\frac{1}{k}} + O(N),$$

由此及引理 14，当 $\lambda \geqslant 3$ 时从 (103) 式可推得

$$T_{k,1}(N) = \frac{1}{\log^3 N}\left(\sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^3(q)}B_q(N,k)\right)\frac{k^2}{k+1}N^{1+\frac{1}{k}}$$

$$+ O\left(\frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}\right) = \frac{k^2}{k+1} \mathfrak{S}_3(N, k) \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^3 N}$$

$$+ O\left(\frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}\right),$$

这就证明了引理。

综合以上结果：引理 16，引理 19 及 (93) 式，就得到了我们所要的定理：

定理 4 设 k 为一给定的正整数，则奇数 N 表为二个奇素数及一个奇素数的 k 次方之和的表法个数

$$T_k(N) = \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3^k=N \\ 2<p_1,\, p_2,\, p_3\leqslant N}} 1$$

有渐近公式

$$T_k(N) = \frac{k^2}{k+1} \mathfrak{S}_3(N, k) \frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^{1+\frac{1}{k}}}{\log^4 N}\right), \quad (104)$$

成立，其中 $\mathfrak{S}_3(N, k)$ 由 (87) 式给出，当 N 为奇数时，

$$\mathfrak{S}_3(N, k) > 0.$$

由定理 4 立即得到

推论 6 设 k 为一给定的正整数，则一定存在一个正常数 $c_{14} = c_{14}(k)$，使得每一个奇数 $N \geqslant c_{14}$ 一定可以表为二个奇素数及一个奇素数的 k 次方之和。

第七章 SELBERG 筛法

筛法[1]是研究关于偶数的 Goldbach 猜想的一个最重要并得到了最好结果的方法．本章的内容仅是为了在第九章中证明陈景润关于大偶数理论的二个重要定理作准备．我们所需要的是关于线性筛法的上界和下界估计，至今这方面的最好结果是由 W. B. Jurkat 和 H. E. Richert[58] 利用 A. Selberg 的上界筛法所得到的．本章的目的就是为了证明这一 Jurkat-Richert 定理．

由于筛法，特别是 Selberg 筛法，是数论中最强有力的方法之一，有着极为广泛的应用，所以我们将对此作较为详细的介绍．虽然这里所需要的只是线性的情形，但在不致使叙述更为复杂时，我们将尽量作较一般的讨论．

关于筛法，它的发展历史及其广泛而富有成果的应用，已在 H. Halberstam 和 H. E. Richert 合著的 "Sieve Methods" 一书中作了很好的叙述及全面的总结，该书还附有十分详尽的文献．我们这里的内容及所用的符号基本上取于该书．

§1. 筛 函 数

设 $\mathscr{A}$ 是一由有限个整数组成的集合(元素可重复)，$\mathscr{P}$ 是一由无限多个素数组成的集合(元素不重复)，以 $\overline{\mathscr{P}}$ 表示所有不属于 $\mathscr{P}$ 的素数组成的集合．再设 $z \geqslant 2$ 是任一实数，并令

$$P(z) = \prod_{\substack{p < z \\ p \in \mathscr{P}}} p. \tag{1}$$

我们定义筛函数

1）本章讨论的筛法通常亦称为小筛法，参看第二章 §2．

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(z))=1}}1. \tag{2}$$

显然,筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 是表示集合 $\mathscr{A}$ 中没有小于 z 且属于 $\mathscr{P}$ 的素因子的元素个数,亦即是表示从集合 $\mathscr{A}$ 中筛去所有具有小于 z 且属于 $\mathscr{P}$ 的素因子的元素后所剩下的元素个数. 容易看出,它有下述简单性质:

(i) $S(\mathscr{A};\mathscr{P},2)=|\mathscr{A}|$[1];

(ii) $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\geqslant 0$;

(iii) $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z_1)\geqslant S(\mathscr{A};\mathscr{P},z_2)$, $2\leqslant z_1\leqslant z_2$; 利用 Möbius 函数,还可以得到

(iv)
$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)=\sum_{a\in\mathscr{A}}\sum_{d|(a,P(z))}\mu(d)=\sum_{d|P(z)}\mu(d)|\mathscr{A}_d|, \tag{3}$$

其中 $\mathscr{A}_d$ 表示集合 $\mathscr{A}$ 中所有能被 d 整除的元素所组成的子集合.

对于筛函数有下面重要的 Бухштаб 恒等式成立.

引理 1 对任意的 $2\leqslant w\leqslant z$, 我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)=S(\mathscr{A};\mathscr{P},w)-\sum_{\substack{w\leqslant p<z\\p\in\mathscr{P}}}S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p). \tag{4}$$

证 把 $\mathscr{P}$ 中所有素数按递增次序排列

$$p_1<p_2<\cdots<p_k<p_{k+1}<\cdots,$$

我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},p_k)=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(p_k))=1}}1$$

$$=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(p_k))=1,\,p_k\nmid a}}1+\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(p_k))=1,\,p_k|a}}1$$

1) 对一个有限集合 μ, 我们总以 $|\mu|$ 表示它的元素的个数.

$$= S(\mathscr{A};\mathscr{P},p_{k+1}) + S(\mathscr{A}_{p_k};\mathscr{P},p_k).$$

由此容易推出，对任意的 $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2$ 有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},p_{k_2}) = S(\mathscr{A};\mathscr{P},p_{k_1}) - \sum_{\substack{p_{k_1} \leqslant p < p_{k_2} \\ p \in \mathscr{P}}} S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p).$$

假定 $p_0 = 1$，则对任意的 $2 \leqslant w \leqslant z$，必有 $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2$ 使

$$p_{k_1-1} < w \leqslant p_{k_1},\quad p_{k_2-1} < z \leqslant p_{k_2}.$$

显然我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},w) = S(\mathscr{A};\mathscr{P},p_{k_1}),$$
$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = S(\mathscr{A};\mathscr{P},p_{k_2}).$$

综合以上各式即得 (4) 式，证毕.

筛法的基本问题是估计筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界和正的下界（如果存在的话）. Бухштаб 恒等式的重要性就在于它使我们可以从 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},w)$ 的上界（下界）估计以及所有的 $S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p)$ $(w \leqslant p < z,\ p \in \mathscr{P})$ 的下界（上界）估计来得到 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界（下界）估计.

从(3)式可以看出，筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的估计和集合 $\mathscr{A}_d$，$d|P(z)$ 有密切的关系. 如果对于给定的集合 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{P}$ 我们适当选取一个正数

$$X > 1,$$

及一个非负可乘函数

$$\omega(d),\quad \mu(d) \neq 0,\quad (d,\bar{\mathscr{P}}) = 1^{1)}.$$

并设

$$r_d = |\mathscr{A}_d| - \frac{\omega(d)}{d} X.$$

这样做的目的是希望能用 $\frac{\omega(d)}{d} X$ 来近似代替 $|\mathscr{A}_d|$，以实现对筛函数的估计. 这当然要求误差项 r_d 尽可能地小（在某种平均意

1) 设 μ 是一整数集合，d 为一整数，$(d,\mu) = 1$ 表示 d 和 μ 中的每一个数都互素.

义上）．实质上，这就是要求集合 $\mathscr{A}$ 中的元素分布是比较"均匀"的．如何选取最好的 X 和 $\omega(d)$，这主要由所讨论的具体集合 $\mathscr{A}$ 的性质来决定．下面举例说明．

例 1 设 $(l, k)=1, x>k \geqslant 1$

$$\mathscr{A}=\{a: a \leqslant x, a \equiv l(k)\}; \quad \mathscr{P}=\{p: p \nmid k\}.$$

由于

$$\mathscr{A}_d=\left\{b: b \leqslant \frac{x}{d}, db \equiv l(k)\right\}$$

故从一次同余方程解的性质知，可选取

$$X=\frac{x}{k},$$

$$\omega(d)=1, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, \bar{\mathscr{P}})=(d, k)=1.$$

且有

$$r_d=|\mathscr{A}_d|-\frac{x}{kd}, \quad |r_d| \leqslant 1, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, k)=1.$$

例 2 设 N 为偶数

$$\mathscr{A}=\{a: a=N-p, p \leqslant N\},$$

$$\mathscr{P}=\{p: p \nmid N\}$$

由于

$$\mathscr{A}_d=\{p: p \equiv N(d), p \leqslant N\},$$

故由算术级数中素数分布性质知，可取

$$X=\operatorname{Li} N,$$

$$\omega(d)=\frac{d}{\phi(d)}, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, N)=1.$$

且有

$$r_d=\pi(N; d, N)-\frac{1}{\phi(d)} \operatorname{Li} N=E_0(N; d, N),$$

$$\mu(d) \neq 0, \quad (d, N)=1.$$

例 3 设 N 为偶数，$\mathscr{E}$ 为一正整数集合[1]，且满足条件 $(N, \mathscr{E})=1$，

$$\mathscr{A}=\{a: a=N-cp, c \in \mathscr{E}, cp \leqslant N\},$$

$$\mathscr{P}=\{p: p \nmid N\}$$

由于

$$\mathscr{A}_d=\{p: cp \equiv N(d), c \in \mathscr{E}, cp \leqslant N\},$$

---

1) 集合 $\mathscr{E}$ 可和 N 有关，它的元素亦可以重复．

故由一次同余方程的解及算术级数中素数分布性知，可选取

$$X = \sum_{e \in \mathscr{E}} \mathrm{Li}\,\frac{N}{e},$$

$$\omega(d) = \frac{d}{\phi(d)}, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1$$

且有

$$\begin{aligned} r_d &= \sum_{e \in \mathscr{E}} \Bigg(\sum_{\substack{ep \leqslant N \\ ep \equiv N(d)}} 1 - \frac{1}{\phi(d)} \mathrm{Li}\,\frac{N}{e} \Bigg) \\ &= \sum_{\substack{e \in \mathscr{E} \\ (e, d) = 1}} \Bigg(\sum_{\substack{ep \leqslant N \\ ep \equiv N(d)}} 1 - \frac{1}{\phi(d)} \mathrm{Li}\,\frac{N}{e} \Bigg) - \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\substack{e \in \mathscr{E} \\ (e, d) > 1}} \mathrm{Li}\,\frac{N}{e} \\ &= \sum_{\substack{e \in \mathscr{E} \\ (e, d) = 1}} E_0(N; e, d, N) - \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\substack{e \in \mathscr{E} \\ (e, d) > 1}} \mathrm{Li}\,\frac{N}{e}, \end{aligned}$$

$$\mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1.$$

例 4 设 N 为偶数

$$\mathscr{A} = \{a : a = n(N - n),\ n \leqslant N\},$$

$$\mathscr{P} = \{p : p \nmid N\}$$

由于

$$\mathscr{A}_d = \{n : n(N - n) \equiv 0(d),\ n \leqslant N\}$$

从同余方程 $n(N - n) \equiv 0(d)$ 的解数 $\rho(d)$ 是 d 的可乘函数且

$$\rho(p) = \begin{cases} 2, & p \nmid N, \\ 1, & p \mid N, \end{cases}$$

可知，可以取

$$X = N,$$

$$\omega(d) = 2^{\nu_1(d)}, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1.$$

且有

$$r_d = |\mathscr{A}_d| - \frac{2^{\nu_1(d)}}{d} N, \quad |r_d| \leqslant 2^{\nu_1(d)}, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1.$$

在以后，除了考虑集合 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{P}$ 外，还需要同时讨论集合

$$\begin{cases} \mathscr{A}(q) = \mathscr{A}_q, \\ \mathscr{P}(q) = \{p : p \in \mathscr{P},\ p \nmid q\}, \end{cases} \quad \mu(q) \neq 0, \ (q, \overline{\mathscr{P}}) = 1. \qquad (5)$$

如果对应于集合 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{P}$，我们选取了 X 及 $\omega(d)$，那末相应于每一对集合 $\mathscr{A}(q)$ 和 $\mathscr{P}(q)$，$X(q)$ 和 $\omega(d, q)$ 可取为

$$
\begin{cases}
X(q) = \dfrac{\omega(q)}{q} X, \\
\omega(d, q) = \omega(d), \quad \mu(qd) \neq 0, \quad (qd, \mathscr{P}) = 1.
\end{cases} \tag{6}
$$

且有

$$
\begin{aligned}
r_d(q) &= |\mathscr{A}_d(q)| - \frac{\omega(d, q)}{d} X(q) \\
&= |\mathscr{A}_{qd}| - \frac{\omega(qd)}{qd} X = r_{qd}, \\
&\mu(qd) \neq 0, \quad (qd, \mathscr{P}) = 1.
\end{aligned} \tag{7}
$$

最后，利用所选取的X及$\omega(d)$，我们来看一下估计筛函数的困难。从(3)式我们有

$$
\begin{aligned}
S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) &= \sum_{d|P(z)} \mu(d) \frac{\omega(d)}{d} X + \sum_{d|P(z)} \mu(d) r_d \\
&= X \prod_{\substack{p<z \\ p \in \mathscr{P}}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) + \theta \sum_{d|P(z)} |r_d|, \quad |\theta| \leqslant 1.
\end{aligned}
$$

但是我们知道，当z相对于X并不是很大时，余项的项数 $\sum\limits_{d|P(z)} 1$，即 $P(z)$ 的除数个数就可能很大，例如取 $P(z) = \prod\limits_{p<z} p$，则当 $z > \log X$ 时，余项的项数就超过了 X，这样就不可能由此得到有用的估计。 这种方法仅当z相对于X为很小时才有效（例如 $z \ll \log\log X$），这就是所谓 Eratosthenes 筛法。这种筛法在理论上是没有用处的，因为对于数论问题，所需要的正是z相对于X为较大时的情形（例如，$z = x^b$，$0 < b < 1$）。V. Brun 和 A. Selberg 先后对这种筛法作了重要改进，它们的共同点是设法控制余项的项数，使从余项所得的估计相对于主项来说可以忽略不计，同时也要使主项得到尽可能好的估计。 Brun 筛法的思想是十分深刻的，可能仍有进一步研究的价值。Selberg 筛法应用方便，并总是得到了比 Brun 筛法更好的结果。

这一节中所引进的符号：$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$，z，$P(z)$，X，$\omega(d)$，r_d等，以后要经常使用，它们的定义及所满足的条件到时就不作一一说

明了。

§2. 最简单的 Selberg 上界筛法

A. Selberg 利用求二次型极值的方法，给出了筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界估计.

为了简单起见，本节及§4，§6（§3除外）中都假定 $\omega(d)$ 满足条件

$$0<\frac{\omega(p)}{p}\leqslant 1-\frac{1}{L_1},\quad (p,\overline{\mathscr{P}})=1, \tag{8}$$

其中 L_1 为大于1的常数，§1中所举的四个例子均满足这个条件. 事实上只要适当选取集合 $\mathscr{P}$，我们总是可以做到这一点的.

设 $\xi\geqslant 2$，λ_d，$d|P(z)$，是满足条件

$$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_d=0,\quad d\geqslant\xi,\end{cases} \tag{9}$$

的任意一组实数，这样，我们就有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\leqslant\sum_{a\in\mathscr{A}}\Big(\sum_{d|(a,P(z))}\lambda_d\Big)^2$$

$$=\sum_{\substack{d_i|P(z)\\ i=1,2}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\Big(\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ [d_1,d_2]|a}}1\Big)=X\Sigma_1+\Sigma_2, \tag{10}$$

其中

$$\Sigma_1=\sum_{\substack{d_i|P(z)\\ i=1,2}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\omega([d_1,d_2])}{[d_1,d_2]} \tag{11}$$

$$\Sigma_2=\sum_{\substack{d_i|P(z)\\ i=1,2}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}r_{[d_1,d_2]}. \tag{12}$$

我们把 $X\Sigma_1$ 称为主项，Σ_2 称为余项. 由于当 $d\geqslant\xi$ 时 $\lambda_d=0$，所以余项 Σ_2 的项数不超过 ξ^2. 这样，通过对参数 ξ 的选择就可以控制余项的阶，使其低于主项的阶而可略去. 同时我们要选择一组满足所述条件的 λ_d 使 Σ_1 最小而得到一个尽可能好的上界估计.

首先我们来讨论主项 Σ_1，为此，注意到 $\omega(d)$ 满足条件 (8)，我们可以定义可乘函数 $g(l)$ $(\mu(l) \neq 0, (l, \mathscr{P}) = 1)$：

$$\begin{cases} g(1) = 1;\ g(p) = \dfrac{\omega(p)}{p}\left(1 - \dfrac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}, \ (p, \mathscr{P}) = 1; \\ g(l) = \prod\limits_{p|l} g(p) = \dfrac{\omega(l)}{l} \prod\limits_{p|l}\left(1 - \dfrac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}, \\ \qquad\qquad \mu(l) \neq 0,\ (l, \mathscr{P}) = 1. \end{cases} \tag{13}$$

由定义及 $\omega(d)$ 满足条件 (8) 式，容易推出

$$\begin{cases} g(l) > 0, & \mu(l) \neq 0,\ (l, \mathscr{P}) = 1; \\ 1 + \dfrac{1}{g(p)} = \dfrac{p}{\omega(p)}, & p \in \mathscr{P}; \\ 1 + g(p) = \left(1 - \dfrac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}, & p \in \mathscr{P}. \end{cases} \tag{14}$$

由此及

$$\frac{\omega([d_1, d_2])}{[d_1, d_2]} = \frac{\omega(d_1)}{d_1}\,\frac{\omega(d_2)}{d_2}\,\frac{(d_1, d_2)}{\omega((d_1, d_2))},$$

$$\mu(d_i) \neq 0, \quad (d_i, \mathscr{P}) = 1, \quad i = 1, 2.$$

从 (11) 可推得

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{d_i | P(z) \\ i = 1, 2}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \frac{\omega(d_1)}{d_1}\,\frac{\omega(d_2)}{d_2} \sum_{l | (d_1, d_2)} \frac{1}{g(l)}$$

$$= \sum_{l | P(z)} \frac{y_l^2}{g(l)}, \tag{15}$$

其中

$$y_l = \sum_{\substack{d | P(z) \\ l | d}} \lambda_d \frac{\omega(d)}{d}, \quad l | P(z). \tag{16}$$

由 Möbius 变换知

$$\lambda_d \frac{\omega(d)}{d} = \sum_{\substack{l | P(z) \\ d | l}} \mu\left(\frac{l}{d}\right) y_l, \quad d | P(z). \tag{17}$$

当 λ_d，$d | P(z)$，满足条件 (9) 式时，由以上两式可知，y_l，$l | P(z)$，满足条件

$$\begin{cases} y_l = 0, \quad l \geqslant \xi, \quad l \mid P(z), \\ \sum\limits_{l \mid P(z),\, l < \xi} \mu(l) y_l = 1. \end{cases} \tag{18}$$

这样一来,关系式 (16) 及 (17) 表明,给定一组实数 λ_d, $(d \mid P(z))$ 后,就唯一确定了一组实数 y_l, $l \mid P(z)$,反之亦然;此外,当 λ_d, $d \mid P(z)$ 满足条件(9)时,y_l, $l \mid P(z)$ 就满足条件 (18),反之亦然.因而,当条件 (9) 成立时,利用 Schwarz 不等式,由 (18) 及 (15) 式可推得(注意有 $g(l) > 0$),

$$1 = \Big(\sum_{\substack{l \mid P(z) \\ l < \xi}} \mu(l) y_l\Big)^2 = \Big(\sum_{\substack{l \mid P(z) \\ l < \xi}} \mu(l)\sqrt{g(l)}\,\frac{y_l}{\sqrt{g(l)}}\Big)^2$$

$$\leqslant \sum_{\substack{l \mid P(z) \\ l < \xi}} g(l) \sum_{\substack{l \mid P(z) \\ l < \xi}} \frac{y_l^2}{g(l)} = \Sigma_1 \cdot \sum_{l \mid P(z),\, l < \xi} g(l), \tag{19}$$

其中等号当且仅当

$$y_l = \mu(l) g(l) \Big(\sum_{d \mid P(z),\, d < \xi} g(d)\Big)^{-1}, \quad l < \xi, \quad l \mid P(z)$$

时才成立.由以上讨论可知,(19) 式中的等号亦当且仅当

$$\begin{aligned} \lambda_d &= \frac{d}{\omega(d)} \sum_{\substack{l \mid P(z) \\ d \mid l}} \mu\Big(\frac{l}{d}\Big) y_l \\ &= \mu(d)\,\frac{d}{\omega(d)} \sum_{\substack{l \mid P(z) \\ d \mid l,\, l < \xi}} g(l) \Big(\sum_{\substack{h \mid P(z) \\ h < \xi}} g(h)\Big)^{-1} \\ &= \mu(d)\,\frac{d}{\omega(d)}\, g(d) G_d\Big(\frac{\xi}{d}, z\Big)(G_1(\xi, z))^{-1} \\ &= \mu(d) \prod_{p \mid d} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1} G_d\Big(\frac{\xi}{d}, z\Big)(G_1(\xi, z))^{-1}, \\ &\qquad d \mid P(z), \quad d < \xi \end{aligned} \tag{20}$$

时才成立,其中

$$G_k(x, z) = \sum_{\substack{l \mid P(z) \\ l < x,\, (l, k) = 1}} g(l). \tag{21}$$

综合以上讨论,由 (15)、(19) 式可得以下结论,对满足条件 (9) 的任意一组实数 λ_d, $d \mid P(z)$,恒有

$$\Sigma_1 \geqslant \frac{1}{G_1(\xi, z)}$$

成立，其中等号当且仅当 λ_d 取由（20）式确定的值时才成立．这样一来，只要我们所选取的这组实数 λ_d，就是由（9）及（20）式所确定的，那末这时 Σ_1，亦即（10）式中的主项 $X\Sigma_1$，取最小值，

$$X\Sigma_1 = \frac{X}{G_1(\xi, z)}. \tag{22}$$

现在我们来讨论余项，首先证明对于由（20）式所确定的 $\lambda_d(d|P(z), d<\xi)$ 有

$$|\lambda_d| \leqslant 1 \tag{23}$$

成立．对给定的 $d|P(z), d<\xi$，我们有

$$\begin{aligned} G_1(\xi, z) &= \sum_{\substack{l|P(z)\\ l<\xi}} g(l) = \sum_{h|d} \sum_{\substack{l|P(z)\\ l<\xi, (l, d)=h}} g(l) \\ &= \sum_{h|d} g(h) \sum_{\substack{m|P(z)\\ m<\xi/h, (m, d)=1}} g(m) \\ &\geqslant G_d\left(\frac{\xi}{d}, z\right) \sum_{h|d} g(h) \\ &= G_d\left(\frac{\xi}{d}, z\right) \prod_{p|d} \left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

由此及（20）式即得（23）式．

其次，容易证明，当 $\mu(d) \neq 0$ 时方程

$$[d_1, d_2] = d$$

对于数对 $\{d_1, d_2\}$ 的解数为 $3^{\nu_1(d)}$，由此及（23）式从（12）式得

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &\leqslant \sum_{\substack{d_i|P(z)\\ d_i<\xi, i=1,2}} |r_{[d_1, d_2]}| = \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} |r_d| \sum_{\substack{d_i|P(z)\\ d_i<\xi, i=1,2\\ [d_1, d_2]=d}} 1 \\ &\leqslant \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)} |r_d|. \end{aligned}$$

由此及（22），（10）式就证明了本节的定理．

定理 1 当条件 (8) 成立时，对任意实数 $\xi \geqslant 2$，我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \leqslant \frac{X}{G_1(\xi,z)} + \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|, \tag{24}$$

其中 $G_1(\xi,z)$ 由 (21) 式确定.

特别地，在定理 1 中取 $\xi = z$，我们就得到了常用的最简单的 Selberg 上界筛法.

定理 1′ 当条件 (8) 成立时，我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \leqslant \frac{X}{G_1(z)} + \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|, \tag{25}$$

其中

$$G_1(z) = G_1(z,z), \tag{26}$$

$G_1(z,z)$ 由 (21) 式确定.

因此，为了估计 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界，一方面对主项来说，就是要进一步研究 $G_1(\xi,z)$ 和 $G(z)$ 的性质，求出它们尽可能大的下界，这就是 § 3 所要讨论的内容；另一方面对余项来说，就是要估计

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|.$$

对此，必须根据具体的问题作具体的讨论，有时这是很复杂的. 本书中所需要的是 § 1 中的例 2 及例 3 所对应的余项. 这时，它们的余项分别为

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}\left|\pi(N;d,N) - \frac{1}{\phi(d)}\operatorname{Li} N\right|, \tag{27}$$

及

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}\left|\sum_{\substack{e\in\mathscr{E}\\ (e,d)=1}}\left(\pi(N;e,d,N) - \frac{1}{\phi(d)}\operatorname{Li}\frac{N}{e}\right)\right|. \tag{28}$$

显然，(27) 式为 (28) 式的特殊情形，后者的估计更为复杂，我们将在第八章中专门讨论这种余项的估计.

§3. 函数 $G_1(\xi, z)$ 和 $G_1(z)$

本节将在 $\omega(p)$ 满足一定的条件下，导出 $G_1(\xi, z)$ 的一个下界估计，以及 $G_1(z)$ 的渐近公式. 根据 (21) 式,

$$G_1(\xi, z) = \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < \xi}} g(d),$$

$$G_1(z) = G_1(z, z) = \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < z}} g(d).$$

以后，经常要应用熟知的 Mertens 的三个素数公式，现列出如下 (可参看 [43, 定理 425, 427, 428], [51, 第五章 §9] 或 [24], [92]):

$$\sum_{w \leqslant p < z} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} + O(1), \quad 2 \leqslant w < z \tag{29}$$

$$\sum_{w \leqslant p < z} \frac{1}{p} = \log \frac{\log z}{\log w} + O\left(\frac{1}{\log w}\right), \quad 2 \leqslant w < z \tag{30}$$

$$V(z) = \prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log z} + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right), \quad 2 \leqslant z \tag{31}$$

其中 γ 为 Euler 常数.

在本节中，为了方便起见，当 $p \in \mathscr{P}$ 时，定义

$$\omega(p) = 0,$$

这样，我们就把 §1 中的可乘函数 $\omega(d)$ (通过(13)也相应地把 §2 中的可乘函数 $g(d)$) 的定义域扩大到了所有的 d, $\mu(d) \neq 0$ 上，但这时原来假定的 $\omega(d)$ 要满足的条件 (8)，就相应的变为对所有的 p 满足:

$$0 \leqslant \frac{\omega(p)}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{L_1}. \tag{32}$$

(8) 式中假定 $\frac{\omega(p)}{p} > 0$ 是为了保证 $g(l) > 0$，这一点主要是在推导(19)式时所必需用到的. 在本节中，仅是为了研究 $G_1(\xi, z)$及 $G_1(z)$，就并不必需有这样的条件，而且在作了这样的推广后，它

们的值仍保持不变，因而也允许作这样的推广．显然，作了这样的推广后，在本节中，集合 $\mathscr{P}$ 就是由所有素数所组成的集合，而

$$P(z)=\prod_{p<z}p.$$

在本节中，我们还要求 $\omega(d)$ 满足条件：

$$\left|\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)\log p}{p}-\kappa\log\frac{z}{w}\right|\leqslant L_2,\quad 2\leqslant w\leqslant z,\tag{33}$$

其中 κ，L_2 为二个正常数．由（29）式可以看出这条件表示：平均起来说 $\omega(p)$ 是等于 κ．简单的来说，当 $\kappa=1$ 时，我们称其是线性的，估计相应于这种情形的筛函数的上界及下界的筛法，就称为线性筛法．显见 § 1 的例 1—3 都是线性的，而例 4 有 $\kappa=2$，就不是线性的了．在一般情形下，由条件（33）仅能推得很弱的结果，

$$\frac{\omega(p)}{p}\leqslant\frac{L_2}{\log p}.\tag{34}$$

容易证明，$G_1(\xi,z)$ 有下述最简单的性质：

引理 2 $G_1(\xi,z)$ 分别为 ξ 及 z 的增函数，并有

(i) $G_1(\xi,z)\geqslant 1$,

(ii) $G_1(\xi,z)=G_1(\xi,\xi)=G_1(\xi)$, $\xi\leqslant z$,

(iii) $G_1(\xi,z)\leqslant\dfrac{1}{W(z)}$,

其中

$$W(z)=\prod_{p<z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right).\tag{35}$$

证　我们只要证明 (iii)，其它是显然的．由 $G_1(\xi,z)$ 的定义 (21) 及 (14) 式可得

$$G_1(\xi,z)=\sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d<\xi}}g(d)\leqslant\sum_{d\mid P(z)}g(d)$$

$$=\prod_{p<z}(1+g(p))=\prod_{p<z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}.$$

由此即得 (iii)，证毕．

我们首先来研究 $W(z)$ 的性质. 为此要证明几个引理

引理 3 设 $h(x)$ 是单调函数,

$$F(x)=f(x)+r(x),\quad |r(x)|\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

则有

$$\left|\int_a^b h(x)dF(x)-\int_a^b h(x)df(x)\right|\leqslant 4M\max(|h(a)|,\quad |h(b)|),$$

这里的积分假定都存在。

证略.

引理 4 对任意的 $2\leqslant w\leqslant z$, 我们有

$$W(z)=W(w)-\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}W(p).$$

此引理的证明和引理 1 完全相同,故略.

引理 5 当条件 (33) 式成立时, 对任意的 $2\leqslant w\leqslant z$, 我们有

$$\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}=\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+O\left(\frac{1}{\log w}\right).$$

证 由条件 (33) 及引理 3 得

$$\begin{aligned}\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}&=\int_w^z\frac{1}{\log t}d\left(\sum_{w\leqslant p<t}\frac{\omega(p)\log p}{p}\right)\\&=\kappa\int_w^z\frac{1}{\log t}d\left(\log\frac{t}{w}\right)+O\left(\frac{1}{\log w}\right)\\&=\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+O\left(\frac{1}{\log w}\right).\end{aligned}$$

证毕,其中"O"中的常数依赖于 L_2.

引理 6 当条件 (32), (33) 式成立时,对任意的 $2\leqslant w\leqslant z$, 有

$$\sum_{w\leqslant p<z}\frac{1}{p^s}\left(g(p)-\frac{\kappa}{p}\right)=O\left(\frac{1}{w^s\log w}\right),\quad s\geqslant 0$$

其中"O"中的常数和 s 无关.

证 由 (14) 知

$$g(p)=\frac{\omega(p)}{p}+\frac{\omega(p)}{p}g(p),$$

再根据条件 (32) 及 (34) 式有

$$\frac{\omega(p)}{p}g(p)\leqslant L_1\frac{\omega^2(p)}{p^2}\leqslant L_1L_2\frac{\omega(p)}{p\log p}.$$

又由引理 3，引理 5 有

$$\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p\log p}=\int_w^z\frac{1}{\log t}d\left(\sum_{w\leqslant p<t}\frac{\omega(p)}{p}\right)$$

$$=\kappa\int_w^z\frac{1}{\log t}d\log\frac{\log t}{\log w}+O\left(\frac{1}{\log^2 w}\right)$$

$$=\kappa\left(\frac{1}{\log w}-\frac{1}{\log z}\right)+O\left(\frac{1}{\log^2 w}\right). \qquad (36)$$

所以从以上结果及引理 5，(30) 式可推得

$$\sum_{w\leqslant p<z}g(p)=\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}+O\left(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p\log p}\right)$$

$$=\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+O\left(\frac{1}{\log w}\right)$$

$$=\kappa\sum_{w\leqslant p<z}\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{\log w}\right).$$

这就证明了 $s=0$ 的情形。再由此及引理 3 即得

$$\sum_{w\leqslant p<z}\frac{1}{p^s}\left(g(p)-\frac{\kappa}{p}\right)=\int_w^z\frac{1}{t^s}d\left(\sum_{w\leqslant p<t}\left(g(p)-\frac{\kappa}{p}\right)\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{w^s\log w}\right).$$

其中“O”中的常数和 s 无关，证毕.

引理 7 当条件 (32)，(33) 式成立时，对任意的 $2\leqslant w\leqslant z$，有

$$\prod_{w\leqslant p<z}\left(1+\frac{g(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^\kappa=1+O\left(\frac{1}{w^s\log w}\right),\quad s\geqslant 0$$

其中“O”中的常数和 s 无关.

证 由于

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\int_0^x\frac{t}{1+t}dt,$$

所以当 $x \geqslant -\frac{1}{2}$ 时有

$$\log(1+x)=x+O(x^2),$$

由此及引理 6，(36) 式，并利用

$$g^2(p) \leqslant L_1^2 \frac{\omega^2(p)}{p^2} \leqslant L_1^2 L_2 \frac{\omega(p)}{p\log p},$$

可得到

$$\begin{aligned}
&\log\left(\sum_{w\leqslant p<z}\left(1+\frac{g(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{\kappa}\right)\\
&\quad=\sum_{w\leqslant p<z}\frac{1}{p^s}\left(g(p)-\frac{\kappa}{p}\right)\\
&\qquad+O\left(\sum_{w\leqslant p<z}\left(\frac{g^2(p)}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{2s+2}}\right)\right)=O\left(\frac{1}{w^s\log w}\right).
\end{aligned}$$

由此立即推出引理所需的结果，证毕.

由引理 7 直接得到下面的推论

推论 1 当条件 (32)，(33) 成立时，无穷乘积

$$\prod_p\left(1+\frac{g(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{\kappa},$$

对 $s \geqslant 0$ 一致收敛，且一致地有

$$\prod_{p\geqslant w}\left(1+\frac{g(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{\kappa}=1+O\left(\frac{1}{w^s\log w}\right).$$

特别地，令 $s=0$，我们有下面的结果，

推论 2 当条件 (32)，(33) 成立时无穷乘积

$$C(\omega)=\prod_p\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa}.$$

收敛，且

$$\prod_{p\geqslant w}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa}=1+O\left(\frac{1}{\log w}\right).$$

证　由 (14) 知

$$1+g(p)=\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1},$$

由此及推论 1（令 $s=0$）即得所要的结果.

有了上面这些引理，我们就得到了 $W(z)$ 的渐近公式，

定理 2 当条件 (32)，(33) 成立时，对 $w\geqslant 2$ 我们有

$$W(w)=C(\omega)\frac{e^{-\kappa\gamma}}{\log^{\kappa}w}\left(1+O\left(\frac{1}{\log w}\right)\right).$$

证 由推论 2 得

$$\begin{aligned}W(w)&=\prod_{p<w}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\\&=\left(\prod_{p<w}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa}\right)V^{\kappa}(w)\\&=C(\omega)V^{\kappa}(w)\left(1+O\left(\frac{1}{\log w}\right)\right),\end{aligned}$$

由此及 (31) 式就证明了我们的定理.

从定理 2 容易推出下面的结果

推论 3 当条件 (32)，(33) 成立时，对 $2\leqslant w\leqslant z$ 我们有

$$\frac{W(w)}{W(z)}=\left(\frac{\log z}{\log w}\right)^{\kappa}\left(1+O\left(\frac{1}{\log w}\right)\right).$$

现在我们来证明 $G_1(\xi,z)$，$(\xi\geqslant z)$ 的一个下界估计.

定理 3 当条件 (32)，(33) 成立时，对任意的 $2\leqslant z\leqslant\xi$ 及 $\lambda\geqslant 0$，我们有

$$\frac{1}{G_1(\xi,z)}\leqslant W(z)\left\{1+O\left(\exp\left(-\lambda\frac{\log\xi}{\log z}+(e^{\lambda}-1)\right)\left(\kappa+\frac{L_2}{\log z}\right)\right)\right\},$$

其中“O”中的常数和 λ 无关.

证 对有界的 z 上式显然成立，故可假定 $z\geqslant B$，B 为一待定常数. 对任意的 $s\leqslant 1$，由 (14) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{W(z)}-G_1(\xi,z)&=\sum_{\substack{d\mid P(z)\\d>\xi}}g(d)\\&\leqslant\sum_{\substack{d\mid P(z)\\d>\xi}}g(d)\left(\frac{d}{\xi}\right)^{1-s}\leqslant\sum_{d\mid P(z)}g(d)\left(\frac{d}{\xi}\right)^{1-s}\end{aligned}$$

$$= \xi^{s-1} \prod_{p<z} \left(1 + \frac{\omega(p)}{p^s}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}\right),$$

进而有

$$1 - W(z)G_1(\xi, z) \leqslant \xi^{s-1} \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p} + \frac{\omega(p)}{p^s}\right)$$

$$= \exp\Bigg(-(1-s)\log\xi + \sum_{p<z}$$

$$\cdot \log\left(1 + \omega(p)\left(\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p}\right)\right)\Bigg)$$

$$\leqslant \exp\left(-(1-s)\log\xi + \sum_{p<z}\left(\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p}\right)\omega(p)\right), \quad (37)$$

在 $s = 1$ 处展开

$$\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} e^{(1-s)\log p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^n p}{n!}(1-s)^n.$$

因而我们有

$$\sum_{p<z}\left(\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p}\right)\omega(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-s)^n}{n!} \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p}\log^n p,$$

由条件 (33) 及引理 3，当 $n \geqslant 1$ 时有

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p}\log^n p = \int_2^z \log^{n-1} t\, d\left(\sum_{2\leqslant p<t} \frac{\omega(p)}{p}\log p\right)$$

$$\leqslant \kappa \int_2^z \log^{n-1} t\, d\left(\log\frac{t}{2}\right) + L_2 \log^{n-1} z$$

$$\leqslant \frac{\kappa}{n}\log^n z + L_2 \log^{n-1} z.$$

现取 $1 - s = \dfrac{\lambda}{\log z}$，由以上二式得到

$$\sum_{p<z}\left(\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p}\right)\omega(p) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\kappa}{n} + \frac{L_2}{\log z}\right)$$

$$\leqslant (e^\lambda - 1)\left(\kappa + \frac{L_2}{\log z}\right).$$

由此及 (37) 式，引理 2 推得

$$0 \leqslant 1 - W(z)G_1(\xi, z) \leqslant \exp\left(-\lambda \frac{\log \xi}{\log z} + (e^\lambda - 1)\left(\kappa + \frac{L_2}{\log z}\right)\right). \tag{38}$$

在上式中取 $\lambda = 1$, $\xi = z^{c_1}$, c_1 为一取定常数，使

$$\exp\left(-c_1 + (e-1)\left(\kappa + \frac{L_2}{\log 2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

这样，对任意的 $z \geqslant 2$，由以上二式得到

$$W(z)G_1(z^{c_1}, z) \geqslant \frac{1}{2}.$$

现取待定常数 $B = 2^{c_1}$，所以当 $z \geqslant B$ 时就有 $z^{\frac{1}{c_1}} \geqslant 2$，故由上式推出

$$W(z^{\frac{1}{c_1}})G_1(z, z^{\frac{1}{c_1}}) \geqslant \frac{1}{2}, \quad z \geqslant B = 2^{c_1}.$$

因此，当 $\xi \geqslant z \geqslant B$ 时，由此及引理 2，推论 3 可得

$$\frac{1}{W(z)G_1(\xi, z)} = \frac{W(z^{\frac{1}{c_1}})}{W(z)} \frac{1}{W(z^{\frac{1}{c_1}})G_1(\xi, z)}$$
$$\leqslant \frac{W(z^{\frac{1}{c_1}})}{W(z)} \frac{1}{W(z^{\frac{1}{c_1}})G_1(z, z^{\frac{1}{c_1}})} \ll 1.$$

由此及 (38) 式就得到了我们所要的结果，证毕.

最后，我们来推导 $G_1(z)$ 的渐近公式. 为此，考虑函数

$$T(z) = \int_1^z \frac{G_1(t)}{t} dt = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d < z}} g(d) \log \frac{z}{d},$$

并先证明下面的引理

引理 8 当条件 (32)，(33) 成立时，对 $z \geqslant 2$，我们有

$$T(z) = \frac{\log z}{\kappa + 1} G_1(z)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right).$$

证 我们有

$$\sum_{d|P(z)} g(d) \log d = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d < z}} g(d) \sum_{p|d} \log p$$

$$= \sum_{p<z} \log p \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z,\ p|d}} g(d)$$

$$= \sum_{p<z} g(p) \log p G_p\left(\frac{z}{p}, z\right). \tag{39}$$

同时，对任一素数 $p < z$ 有

$$G_1(x, z) = \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x,\ p\nmid d}} g(d) + \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x,\ p|d}} g(d)$$

$$= G_p(x, z) + g(p) G_p\left(\frac{x}{p}, z\right).$$

进而利用

$$g(p) = \frac{\omega(p)}{p}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1},$$

就有

$$G_p(x, z) = \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) G_1(x, z)$$

$$+ \frac{\omega(p)}{p}\left(G_p(x, z) - G_p\left(\frac{x}{p}, z\right)\right).$$

在此式中令 $x = \frac{z}{p}$ 后代入 (39) 式就有

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z}} g(d) \log d = \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \log p G_1\left(\frac{z}{p}, z\right)$$

$$+ \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} g(p) \log p$$

$$\cdot \left(G_p\left(\frac{z}{p}, z\right) - G_p\left(\frac{z}{p^2}, z\right)\right).$$

由引理 3，(33) 式及引理 2 (ii)，我们有

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \log p G_1\left(\frac{z}{p}, z\right)$$

$$= \int_1^z G_1\left(\frac{z}{t}, z\right) d\left(\sum_{p<t} \frac{\omega(p)}{p} \log p\right)$$

$$= \kappa \int_1^z G_1\left(\frac{z}{t}, z\right) \frac{dt}{t} + O(G_1(z))$$

$$= \kappa \int_1^z G_1(u, z) \frac{du}{u} + O(G_1(z))$$

$$= \kappa T(z) + O(G_1(z)).$$

利用 (34) 式及(见引理 6)

$$\sum_{p<z} g(p) = \kappa \log \log z + O(1)$$

可得

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} g(p) \log p \left(G_p \left(\frac{z}{p}, z \right) - G_p \left(\frac{z}{p^2}, z \right) \right)$$

$$\ll \sum_{p<z} g(p) \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ \frac{z}{p^2} \leqslant d < \frac{z}{p}}} g(d)$$

$$\leqslant \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < z}} g(d) \sum_{\sqrt{\frac{z}{d}} \leqslant p < \frac{z}{d}} g(p) \ll G_1(z).$$

综合以上结果就有

$$\sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < z}} g(d) \log d = \kappa T(z) + O(G_1(z)),$$

即

$$-(T(z) - \log z G_1(z)) = \kappa T(z) + O(G_1(z)).$$

这就是我们所要证明的.

定理 4 当条件 (32), (33) 成立时, 对 $z \geqslant 2$ 我们有

$$\frac{1}{G_1(z)} = \Gamma(\kappa + 1) e^{\kappa\gamma} W(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z} \right) \right).$$

证 由引理 8 知, 存在一 z_0, 使当 $z \geqslant z_0$ 时有

$$G_1(z) = \frac{\kappa + 1}{1 - r(z)} \frac{T(z)}{\log z}, \quad |r(z)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \geqslant z_0.$$

由此, 并注意到 $r(z) = O\left(\frac{1}{\log z} \right)$ 及

$$T'(z) = \frac{G_1(z)}{z},$$

可推得

$$\frac{T'(z)}{T(z)}=\frac{\kappa+1}{1-r(z)}\frac{1}{z\log z}=\frac{\kappa+1}{z\log z}+O\left(\frac{1}{z\log^2 z}\right),\quad z\geqslant z_0.$$

进而有

$$\frac{d}{dz}(\log T(z)-(\kappa+1)\log\log z)=O\left(\frac{1}{z\log^2 z}\right),\quad z\geqslant z_0,$$

$$\int_z^{\infty}d(\log T(z)-(\kappa+1)\log\log z)=O\left(\frac{1}{\log z}\right),\quad z\geqslant z_0,$$

$$T(z)=c_2\log^{\kappa+1}z\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right),\quad z\geqslant z_0,$$

其中 c_2 为一确定的常数. 由此及引理 8 就得

$$G_1(z)=c_2\log^{\kappa}z\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right),\quad z\geqslant z_0.$$

此外,由引理 2 及定理 2 知

$$G_1(z)\leqslant\frac{1}{W(z)}=O(\log^{\kappa}z),\quad z\geqslant 2$$

以上二式合起来即得

$$G_1(z)=c_2\log^{\kappa}z\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right),\quad z\geqslant 2.$$

下面我们来定出常数 c_2. 对 $s>0$, 由上式可得

$$\begin{aligned}\prod_p\left(1+\frac{g(p)}{p^s}\right)&=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)g(d)}{d^s}\\&=\int_1^{\infty}\frac{1}{y^s}dG_1(y)=s\int_1^{\infty}\frac{G_1(y)}{y^{1+s}}dy\\&=c_2 s\int_1^{\infty}\frac{\log^{\kappa}y}{y^{1+s}}dy+O\left(s\int_1^{\infty}\frac{\log^{\kappa-1}y}{y^{1+s}}dy\right)\\&=c_2\frac{\Gamma(\kappa+1)}{s^{\kappa}}+O\left(\frac{1}{s^{\kappa-1}}\right).\end{aligned}$$

所以

$$c_2=\frac{s^{\kappa}}{\Gamma(\kappa+1)}\prod_p\left(1+\frac{g(p)}{p^s}\right)+O(s).$$

由 Riemann-Zeta 函数性质知

$$\lim_{s\to 0} s^{\kappa}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{-\kappa}=\lim_{s\to 0}(s\zeta(s+1))^{\kappa}=1.$$

由以上二式及推论 2 即得

$$c_2=(C(\omega)\Gamma(\kappa+1))^{-1}.$$

故有

$$\frac{1}{G_1(z)}=C(\omega)\Gamma(\kappa+1)\frac{1}{\log^{\kappa} z}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right),\quad z\geqslant 2.$$

由此及定理 2 即得我们所要的结果，证毕.

由定理 4 容易得到

定理 5 当条件 (32), (33) 成立时，对 $2\leqslant\xi\leqslant z$，我们有

$$\frac{1}{G_1(\xi,z)}=\Gamma(\kappa+1)2^{\kappa}e^{\kappa\gamma}W(z)\left(\frac{\log z}{\log \xi^2}\right)^{\kappa}\left(1+O\left(\frac{1}{\log \xi}\right)\right).$$

证 当 $2\leqslant\xi\leqslant z$ 时，

$$\frac{1}{G_1(\xi,z)}=\frac{1}{G_1(\xi)}=W(z)\frac{W(\xi)}{W(z)}\frac{1}{W(\xi)G_1(\xi)}.$$

由此，从定理 4 及推论 3 即得所要的结果，证毕.

§4. 筛函数估计的两个基本定理

综合 §2 和 §3 的讨论， 我们就可利用 Selberg 筛法来得到关于筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界及下界估计的二个基本定理.

由定理 1 及定理 5 立即得到上界估计.

定理 6 当条件 (8), (33) 成立时，对 $2\leqslant\xi\leqslant z$ 有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\leqslant\Gamma(\kappa+1)2^{\kappa}e^{\kappa\gamma}XW(z)\left(\frac{\log z}{\log \xi^2}\right)^{\kappa}$$

$$\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\log \xi}\right)\right)+\sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d<\xi^2}}3^{\nu_1(d)}|r_d|.$$

特别地，当取 $\xi=z$ 时，由定理 6 和定理 2 就得到了常用的最简单的 Selberg 上界筛法.

定理 6′ 当条件 (8), (33) 式成立时，我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\leqslant C(\omega)\Gamma(\kappa+1)\frac{X}{\log^{\kappa}Z}$$

$$\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)+\sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d<z^2}}3^{\nu_1(d)}|r_d|.$$

作为定理 6′ 的一个应用，我们来估计偶数N表示为二个素数之和的表法个数

$$D(N)=\sum_{p_1+p_2=N}1$$

的上界．设集合 $\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$ 是由 § 1 例 2 所给出，显然有

$$D(N)=S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{2}})+\theta N^{\frac{1}{2}},\quad |\theta|\leqslant 1.$$

设 $z\leqslant N^{\frac{1}{2}}$，则有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{2}})\leqslant S(\mathscr{A};\mathscr{P},z).$$

现对 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 应用定理 6′．由 § 1 例 2 知可取

$$X=\mathrm{Li}\,N,$$

$$\omega(d)=\frac{d}{\phi(d)},\quad \mu(d)\neq 0,\quad (d,N)=1$$

$$r_d=E_0(N;d,N).$$

不难验证条件 (8) ($L_1=2$) 及条件 (33) ($\kappa=1$) 满足，并由引理 2 的推论 2 知(其中当 $p|N$ 时，$\omega(p)=0$)

$$\begin{aligned}C(\omega)&=\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\&=\prod_{p\mid N}\frac{p}{p-1}\prod_{p\nmid N}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\\&=2\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\left(\frac{p}{p-1}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\right)\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\\&=2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}=2C(N),\end{aligned}\qquad (40)$$

其中

$$C(N)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}.$$

这样由定理 6′ 得到

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) \leqslant 2C(N) \frac{\mathrm{Li}\, N}{\log z}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)$$

$$+ \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < z^2}} 3^{\nu_1(d)} |E(N; d, N)|.$$

现取 $z^2 = N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-38}$，则由第八章定理 1 推论 1 得

$$\sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < z^2}} 3^{\nu_1(d)} |E_0(N; d, N)| \ll \frac{N}{\log^3 N}.$$

因而就得到 $D(N)$ 的上界估计

$$D(N) \leqslant 8C(N) \frac{\mathrm{Li}\, N}{\log N}\left(1 + O\left(\frac{\log \log N}{\log N}\right)\right). \tag{41}$$

在第九章中，我们将证明上式中的系数 8 可改进为 7.8342，这是陈景润最近得到的重要结果.

下面我们来证明当 $z \leqslant \xi$ 时，$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$ 的一个渐近估计.

定理 7 当条件 (8), (33) 成立时，对 $2 \leqslant z \leqslant \xi$ 我们有

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) = XW(z)\left\{1 + O\left(\exp\left(-\frac{1}{6}\tau \log \tau\right)\right)\right\}$$

$$+ \theta \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < \xi^2}} 3^{\nu_1(d)} |r_d|, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

其中 “O” 中的常数和 τ 无关，

$$\tau = \frac{\log \xi}{\log z}.$$

证 首先我们来证明，在所说的条件下有

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) \leqslant XW(z)\left\{1 + O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\tau \log \tau\right)\right)\right\}$$

$$+ \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < \xi^2}} 3^{\nu_1(d)} |r_d|. \tag{42}$$

在定理 3 中取 $\lambda = \log \tau \geqslant 0$，由定理 1 及定理 3 得

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) \leqslant XW(z)\{1 + O(\exp(-\tau \log \tau$$

$$+ \tau(\kappa + 2L_2)))\} + \sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|.$$

由此知当 τ 为有界时，(42) 式显然成立，而当 $\tau \geqslant e^{2(\kappa+2L_2)}$ 时，我们有

$$-\tau\log\tau + \tau(\kappa + 2L_2) \leqslant -\frac{1}{2}\tau\log\tau,$$

这就证明了 (42) 式，其次我们来证明

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \geqslant XW(z)\left\{1 + O\left(\exp\left(-\frac{1}{6}\tau\log\tau\right)\right)\right\}$$
$$-\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|. \tag{43}$$

由于总有 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \geqslant 0$，所以当 τ 有界时上式显然成立. 故可设 $\tau \geqslant \max(4\kappa + 5, c_3)$，其中 c_3 为一待定的充分大的常数. 由引理 1 及引理 4 可得

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) - XW(z) = (S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) - X)$$
$$-\sum_{\substack{p<z\\ p\in\mathscr{P}}}\left(S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p) - \frac{\omega(p)}{p}XW(p)\right). \tag{44}$$

现用 (42) 式来估计右边和式中的每一个 $S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p)$ 的上界. 在 (42) 式中取 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}_p$，z 为 p，以及 ξ^2 为 $\xi_p^2 = \frac{\xi^2}{p}$. 由于 $\tau > \frac{3}{2}$，所以 $z < \xi_p$. 这里 $p \leqslant z$，故条件 $2 \leqslant p \leqslant \xi_p$ 满足. 这时相应的

$$\tau_p = \frac{\log\xi_p}{\log p} \geqslant \tau - \frac{1}{2} > 4\kappa + 4.$$

注意到 (6)，(7) 式，由 (42) 式我们得到

$$S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p) - \frac{\omega(p)}{p}XW(p)$$
$$\leqslant O\left(\frac{\omega(p)}{p}XW(p)\exp\left(-\frac{\tau_p}{2}\log\tau_p\right)\right)$$

$$+ \sum_{\substack{d<\xi^2/p \\ d|P(p)}} 3^{\nu_1(d)} |r_{pd}|.$$

由推论 3，并利用 $z<\xi_p$，有

$$\frac{W(p)}{W(z)} \ll \left(\frac{\log z}{\log p}\right)^{\kappa} \leqslant \frac{\log p}{\log z}\left(\frac{\log \xi_p}{\log p}\right)^{\kappa+1} = \frac{\log p}{\log z}\tau_p^{\kappa+1}.$$

从以上三式就推得

$$S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p) - \frac{\omega(p)}{p}XW(p) \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{\omega(p)}{p}\frac{\log p}{\log z}XW(z)\exp\left(-\frac{1}{4}\tau_p\log\tau_p\right)\right)$$

$$+ \sum_{\substack{d<\xi^2/p \\ d|P(p)}} 3^{\nu_1(d)}|r_{pd}|.$$

现在我们选取一个足够大的 c_3，使总有

$$\tau_p \log\tau_p \geqslant \frac{4}{6}\tau\log\tau$$

成立. 此外，由条件 (33) 知

$$\sum_{\substack{p<z \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\omega(p)}{p}\log p \ll \log z.$$

由以上三式即得

$$\sum_{\substack{p<z \\ p\in\mathscr{P}}}\left(S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p) - \frac{\omega(p)}{p}XW(p)\right) \leqslant$$

$$\leqslant O\left(XW(z)\exp\left(-\frac{1}{6}\tau\log\tau\right)\right)$$

$$+ \sum_{\substack{p<z \\ p\in\mathscr{P}}}\sum_{\substack{d<\xi^2/p \\ d|P(p)}} 3^{\nu_1(d)}|r_{pd}|.$$

利用 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) - X = r_1$，由上式及 (44) 式就得到

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) - XW(z) \geqslant$$

$$\geqslant O\left(XW(z)\exp\left(-\frac{1}{6}\tau\log\tau\right)\right)$$

$$-|r_1|-\sum_{\substack{p<z\\p\in\mathscr{P}}}\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\d|P(p)}}3^{\nu_1(d)}|r_{pd}|. \tag{45}$$

这样，为了证明 (43) 式，我们就只要讨论上式右边的余项就可以了。以 $p_M(d)$ 表 d 的最大素因子，不难看出对任意函数 $h(d)$ 有

$$\sum_{\substack{d<\xi^2\\d|P(z)}}h(d)=h(1)+\sum_{\substack{p<z\\p\in\mathscr{P}}}\sum_{\substack{d<\xi^2\\d|P(z),p_M(d)=p}}h(d)$$

$$=h(1)+\sum_{\substack{p<z\\p\in\mathscr{P}}}\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\d|P(p)}}h(pd). \tag{46}$$

现取 $h(d)=3^{\nu_1(d)}|r_d|$，由上式推得

$$\sum_{\substack{d<\xi^2\\d|P(z)}}3^{\nu_1(d)}|r_d|=|r_1|+\sum_{\substack{p<z\\p\in\mathscr{P}}}\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\d|P(p)}}3^{\nu_1(pd)}|r_{pd}|$$

$$\geqslant|r_1|+\sum_{\substack{p<z\\p\in\mathscr{P}}}\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\d|P(p)}}3^{\nu_1(d)}|r_{pd}|.$$

由此及 (45) 式就证明了 (43) 式，从 (42)，(43) 式就得到了定理所要的结果，证毕。

显然，当 τ 很大时，即 z 相对于 ξ 很小时，(43) 式给出了 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的一个下界估计。

从本节所证明的定理 6，定理 7 这两个基本定理出发，对于 $\kappa=1$ 的情形，我们可以利用 Бухштаб 恒等式（引理 1），并通过某种进一步的分拆来得到更好的上界及下界估计。为此我们先要研究与这种分拆过程相应的一对函数 F 和 f 的性质，这就是 §5 所要讨论的内容。

§5. 函数 $F(u)$ 和 $f(u)$

这一节我们将讨论满足方程

$$\begin{cases} F(u) = \dfrac{2e^{\gamma}}{u}, \quad f(u) = 0, \quad 1 \leqslant u \leqslant 2, & (47) \\ (uF(u))' = f(u-1), \quad (uf(u))' = F(u-1), \quad u > 2 & (48) \end{cases}$$

的一对连续函数 $F(u)$ 和 $f(u)$，其中 γ 为 Euler 常数. 由(48)式及函数的连续性直接推得

$$\begin{cases} uF(u) = u_1F(u_1) + \displaystyle\int_{u_1}^{u} f(t-1)dt, \quad 2 \leqslant u_1 \leqslant u, & (49) \\ uf(u) = u_1f(u_1) + \displaystyle\int_{u_1}^{u} F(t-1)dt, \quad 2 \leqslant u_1 \leqslant u. & (50) \end{cases}$$

利用这两个公式及函数的初值条件(47)式，我们就可以逐段求出 $F(u)$ 及 $f(u)$ 的具体表达式. 例如，我们不难得到

$$F(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u}, \quad 1 \leqslant u \leqslant 3, \tag{51}$$

$$f(u) = 2e^{\gamma}\frac{\log(u-1)}{u}, \quad 2 \leqslant u \leqslant 4, \tag{52}$$

$$F(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u}\left(1 + \int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right), \quad 3 \leqslant u \leqslant 5, \tag{53}$$

$$f(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u}\left(\log(u-1) + \int_3^{u-1}\frac{dt}{t}\cdot\int_2^{t-1}\frac{\log(s-1)}{s}ds\right), \quad 4 \leqslant u \leqslant 6, \tag{54}$$

等等. 此外，容易看出，$F(u)$ 是连续可微函数，而 $f(u)$ 除了 $u = 2$ 外连续可微，在 $u = 2$ 处有左右导数存在，且

$$f'(2-0) = 0, \quad f'(2+0) = e^{\gamma}.$$

更进一步，我们从逐段求出 $F(u)$ 及 $f(u)$ 的表达式的过程可以看出，$F(u)$ 和 $f(u)$ 都是逐段解析的.

为了进一步研究 $F(u)$ 和 $f(u)$ 的性质，需要引进一对新的函数：

$$w(u) = \frac{1}{2}e^{-\gamma}(F(u) + f(u)), \tag{55}$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2}e^{-\gamma}u(F(u) - f(u)). \tag{56}$$

容易验证，$w(u)$ 和 $\rho(u)$ 分别为满足下述方程的连续函数：

$$\begin{cases} w(u) = \dfrac{1}{u}, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ (uw(u))' = w(u-1), & u > 2, \end{cases} \tag{57}$$

和

$$\begin{cases} \rho(u) = 1, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ (u-1)\rho'(u) = -\rho(u-1), & u > 2. \end{cases} \tag{58}$$

显然，$w(u)$ 和 $\rho(u)$ 均为除了 $u = 2$ 外的连续可微函数，且有

$$w'(2-0) = \frac{-1}{4}, \quad w'(2+0) = \frac{1}{4},$$

$$\rho'(2-0) = 0, \qquad \rho'(2+0) = -1.$$

我们先来讨论函数 $\rho(u)$ 的性质.

引理 9 $\rho(u)$ 是减函数，且有

$$\rho(u) > 0, \quad \rho(u) = O(e^{-u}).$$

证 从 $\rho(u)$ 的连续性及 (58) 式可推得

$$((u-1)\rho(u))' = \rho(u) - \rho(u-1) = \left(\int_{u-1}^{u} \rho(t)dt\right)', \quad u > 2,$$

$$(u-1)\rho(u) = \int_{u-1}^{u} \rho(t)dt, \quad u \geqslant 2. \tag{59}$$

我们先来证明 $\rho(u) > 0$. 前 $1 \leqslant u \leqslant 2$，由定义知 $\rho(u) > 0$. 现用反证法来证明：当 $u > 2$ 时亦有 $\rho(u) > 0$，若不然，则 $\rho(u)$ 一定有零点，而且这些零点都大于 2，设 $u_0 > 2$ 是使 $\rho(u) = 0$ 的 u 的最小值，即

$$\rho(u_0) = 0, \quad \rho(u) > 0, \quad 1 \leqslant u < u_0.$$

由此及 (59) 式得到矛盾：

$$0 = (u_0 - 1)\rho(u_0) = \int_{u_0-1}^{u_0} \rho(t)dt > 0.$$

故亦一定有 $\rho(u) > 0$，$u > 2$，从 (58) 式及 $\rho(u) > 0$ 即知 $\rho(u)$ 为减函数. 由 $\rho(u)$ 的递减性及 (59)，(58) 式可得

$$(u-1)\rho(u) < \rho(u-1) = -(u-1)\rho'(u), \quad u > 2,$$

即

$$\frac{\rho'(u)}{\rho(u)} < -1, \quad u > 2.$$

所以

$$\log \rho(u) = \int_2^u \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt < -(u-2), \quad u > 2,$$

即

$$\rho(u) < e^2 e^{-u}, \quad u > 2.$$

这就证明了 $\rho(u) = O(e^{-u})$. 引理证毕.

为了讨论 $w(u)$ 的性质，我们需要下面的引理，

引理 10 设 $H(u)$ 是满足方程

$$\begin{cases} H(u) = \dfrac{1}{u^2}, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ uH'(u) = -H(u-1), & u > 2 \end{cases}$$

的连续函数，则 $H(u)$ 是减函数，且有

$$H(u) > 0, \quad H(u) = O(e^{-u}).$$

证 由 $H(u)$ 的定义知.

$$(uH(u))' = H(u) - H(u-1) = \left(\int_{u-1}^u H(t)dt\right)', \quad u > 2,$$

$$uH(u) = \int_{u-1}^u H(t)dt, \qquad u \geqslant 2.$$

故 $H(u)$ 亦满足方程:

$$\begin{cases} H(u) = \dfrac{1}{u^2}, & 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ H(u) = \dfrac{1}{u}\displaystyle\int_{u-1}^u H(t)dt, & u \geqslant 2. \end{cases}$$

以下的证明和引理 9 完全相同，故略.

引理 11 设 $h(u)$ 为任一连续函数，满足条件

$$\begin{cases} h(u) \leqslant 0, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ h(u) \leqslant \dfrac{1}{u}\displaystyle\int_{u-1}^u h(t)dt, & u \geqslant 2, \end{cases}$$

则一定有

$$h(u) \leqslant 0, \quad u \geqslant 1.$$

证　当 $1 \leqslant u \leqslant 2$ 时，由定义知 $h(u) \leqslant 0$ 成立. 现设 $u > 2$，设 $1 \leqslant u_1 \leqslant u$ 使 $h(u_1) = \max\limits_{1 \leqslant t \leqslant u} h(t)$。若 $u_1 \leqslant 2$，则就得到 $h(u) \leqslant 0$；若 $u_1 > 2$，则有

$$h(u_1) \leqslant \frac{1}{u_1}\int_{u_1-1}^{u_1} h(t)\,dt \leqslant \frac{1}{u_1} h(u_1),$$

由此即得 $h(u_1) \leqslant 0$，所以亦有 $h(u) \leqslant 0$。证毕。

引理 12　对函数 $w(u)$ 我们有

$$w(u) = e^{-\gamma} + O(e^{-u}).$$

证　由 $w(u)$ 的定义可得

$$uw'(u) = -w(u) + w(u-1) = -\int_{u-1}^{u} w'(t)\,dt, \quad u > 2.$$

这样，$w'(u)$ 就满足方程

$$\begin{cases} w'(u) = -\dfrac{1}{u^2}, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ w'(u) = -\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_{u-1}^{u} w'(t)\,dt, & u \geqslant 2. \end{cases}$$

前已证明 $|w'(u)|$ 是连续函数，故有

$$\begin{cases} |w'(u)| = \dfrac{1}{u^2}, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ |w'(u)| \leqslant \dfrac{1}{u}\displaystyle\int_{u-1}^{u} |w'(t)|\,dt, & u \geqslant 2. \end{cases}$$

因而函数

$$|w'(u)| - H(u)$$

满足引理 11 的条件，故由引理 10，引理 11 即得

$$|w'(u)| \leqslant H(u) = O(e^{-u}).$$

由此容易推出 $w(+\infty)$ 存在，并有

$$w(u) = w(+\infty) - \int_{u}^{+\infty} w'(u)\,du = w(+\infty) + O(e^{-u}). \tag{60}$$

下面我们来定出 $w(+\infty)$。设

$$y(s) = \int_{1}^{\infty} e^{-su} w(u)\,du, \quad s > 0.$$

显然，右边的积分对 $s \geqslant s_0 > 0$ 是绝对一致收敛的，且

$$|y(s)| \ll \int_0^{\infty} e^{-su} du = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

所以

$$\lim_{s \to +\infty} y(s) = 0.$$

由 (57) 式我们有

$$\begin{aligned} y'(s) &= \int_1^{\infty} -ue^{-su} w(u) du = -\int_1^2 e^{-su} du \\ &\quad - \int_2^{\infty} uw(u) e^{-su} du \\ &= \frac{e^{-2s} - e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \left(uw(u) e^{-su} \Big|_2^{\infty} - \int_2^{\infty} e^{-su} d(uw(u)) \right) \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s} \int_2^{\infty} e^{-su} w(u-1) du \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} (1 + y(s)), \qquad\qquad s > 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{dy}{1+y} = -\left(\frac{e^{-s} - 1}{s} + \frac{1}{s} \right) ds, \quad s > 0.$$

故有

$$\begin{aligned} \log(1 + y(s)) &= -\int_1^s \left(\frac{e^{-t} - 1}{t} + \frac{1}{t} \right) dt + c_4 \\ &= -\int_0^s \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \log s + c_5, \ s > 0. \end{aligned}$$

所以

$$y(s) = c_6 \exp\left(-\int_0^s \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \log s \right) - 1, \quad s > 0.$$

由于 $y(+\infty) = 0$ 及熟知的积分

$$\lim_{s \to \infty} \left(-\int_0^s \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \log s \right) = \gamma,$$

故得 $c_6 = e^{-\gamma}$ 及

$$y(s) = \frac{e^{-\gamma}}{s} \exp\left(-\int_0^s \frac{e^{t} - 1}{t} dt \right) - 1, \quad s > 0.$$

由此推出

$$\lim_{s\to 0} sy(s) = e^{-\gamma}.$$

但另一方面由 $y(s)$ 的定义及 $w(u)$ 的性质可得

$$y(s) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s}\int_1^{\infty} e^{-su} w'(u)du, \quad s > 0,$$

$$sy(s) = e^{-s} + \int_1^{\infty} e^{-su} w'(u)du.$$

由于 $w'(u) \ll e^{-u}$，故上式可以取极限

$$\lim_{s\to 0} sy(s) = 1 + \int_1^{\infty} w'(u)du = w(\infty).$$

这就定出了

$$w(\infty) = e^{-\gamma}.$$

由此及 (60) 式就证明了引理.

现在我们来证明本节的主要结果.

定理 8 由 (47), (48) 式所定义的连续函数 $F(u)$ 及 $f(u)$ 具有下述性质:

(i) $F(u)$ 是正的减函数，且有

$$F(u) = 1 + O(e^{-u}), \tag{61}$$

(ii) $f(u)$ 是正的增函数，且有

$$f(u) = 1 + O(e^{-u}), \tag{62}$$

(iii) $F(u) - f(u) > 0, \quad u \geqslant 1.$ (63)

证 由 (55), (56) 式可解出

$$F(u) = e^{\gamma}\left(w(u) + \frac{\rho(u)}{u}\right), \quad u \geqslant 1,$$

$$f(u) = e^{\gamma}\left(w(u) - \frac{\rho(u)}{u}\right), \quad u \geqslant 1,$$

以及

$$F(u) - f(u) = 2e^{\gamma}\frac{\rho(u)}{u}, \quad u \geqslant 1.$$

应用引理 9 及引理 12，从以上三式立即推得 (61), (62), (63) 式

均成立。

下面我们首先来证明 $F(u)$ 是减函数。由(51)知，只要证明当 $u\geqslant 3$ 时一定有

$$F'(u)<0.$$

用反证法证明。如若不然，则一定有一 $u_0>3$，使

$$F'(u_0)=0,\quad F'(u)<0,\quad 1\leqslant u<u_0.$$

另一方面，利用(63)及(48)式，一定存在 u_1, u_2 满足 $2<u_0-1<u_1<u_0$, $1<u_1-1<u_2<u_1$，使有

$$\begin{aligned}0&=u_0F'(u_0)=f(u_0-1)-F(u_0)\\&<f(u_0-1)-f(u_0)=-f'(u_1)\\&=-\frac{1}{u}(F(u_1-1)-f(u_1))\\&<\frac{1}{u_1}(F(u_1)-F(u_1-1))=\frac{F'(u_2)}{u_1},\end{aligned}$$

即存在一 $u_2<u_0$，使 $F'(u_2)>0$，这就得到了矛盾。所以一定有

$$F'(u)<0,\quad u\geqslant 1,$$

即 $F(u)$ 是狭义的减函数。其次来证明 $f(u)$ 是递增的，显然只要证明

$$f'(u)>0,\quad u>2.$$

由(63)，(48)式及 $F(u)$ 的狭义递减性知

$$uf'(u)=F(u-1)-f(u)>F(u-1)-F(u)>0,\quad u>2$$

这就证明了 $f(u)$ $(u\geqslant 1)$ 是递增的，且当 $u\geqslant 2$ 时 $f(u)$ 是狭义递增的，所以由(47)式知 $f(u)$ 是非负的且

$$f(u)>0,\quad u>2.$$

由此及(63)式即得

$$F(u)>0,\quad u\geqslant 1.$$

引理全部证毕。

华罗庚、闵嗣鹤和许多数学家都研究过这二个函数的性质，并得到了强得多的结果，但在这里并不需要，可参看 [10], [14], [22], [7], [8], [49], [79].

§6. Jurkat-Richert 定理

本节只讨论 $\kappa=1$，即线性的情形. 在这一节我们将证明本章的主要结果——Jurkat-Richert 定理. 在本节内我们应用 §1, §2 及 §3 中的符号，由于本节中的素数 p, p_i 都仅在集合 $\mathscr{P}$ 中取值，为了简单起见，条件 $p\in\mathscr{P}$, $p_i\in\mathscr{P}$ 等，一般都将略去不写，并在推导过程中将 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 简记为 $S(\mathscr{A};z)$. 下面先证明几个引理:

引理 13 设 $2\leqslant B\leqslant A$, $0<\alpha\leqslant 1$ 以及 $C=\min(B,A^{\alpha})$, $2\leqslant D\leqslant C$，则当条件 (32), (33) ($\kappa=1$) 成立时，我们有

$$I=\sum_{D\leqslant p<C}\frac{\omega(p)}{p}W(p)\exp\left(-\frac{\log A}{\log p}\right)$$

$$\leqslant \alpha W(B)\exp\left(-\frac{\log A}{\log B}\right)\left(1+O\left(\frac{\log A}{\log^2 D}\right)\right).$$

证 由引理 4，引理 3 及推论 3 (取 $\kappa=1$) 可得

$$I=\int_D^C\exp\left(-\frac{\log A}{\log t}\right)d\left(\sum_{D\leqslant p<t}\frac{\omega(p)}{p}W(p)\right)$$

$$=W(B)\int_D^C\exp\left(-\frac{\log A}{\log t}\right)d\left(-\frac{W(t)}{W(B)}\right)$$

$$=W(B)\int_D^C\exp\left(-\frac{\log A}{\log t}\right)d\left(-\frac{\log B}{\log t}\right)$$

$$+O\left(W(B)\frac{\log B}{\log^2 D}\exp\left(-\frac{\log A}{\log C}\right)\right)$$

$$\leqslant W(B)\frac{\log B}{\log A}\exp\left(-\frac{\log A}{\log C}\right)$$

$$+O\left(W(B)\frac{\log B}{\log^2 D}\exp\left(-\frac{\log A}{\log C}\right)\right)$$

$$=W(B)\frac{\log B}{\log A}\exp\left(-\frac{\log A}{\log C}\right)\left(1+O\left(\frac{\log A}{\log^2 D}\right)\right).$$

若 $C=B\leqslant A^{\alpha}$，则有

$$\frac{\log B}{\log A}\leqslant \alpha;$$

若 $C=A^{\alpha}<B\leqslant A$，则由于 xe^{-x} 当 $x\geqslant 1$ 时是减函数，以及 $1\leqslant \frac{\log A}{\log B}<\frac{1}{\alpha}$，故有

$$\frac{\log B}{\log A}\exp\left(-\frac{\log A}{\log C}\right)=\frac{\log B}{\log A}\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right)<\alpha\exp\left(-\frac{\log A}{\log B}\right).$$

综合以上三式就得到了所要的结果，证毕.

下面的引理是 Бухштаб 恒等式(引理 1)的直接推广.

引理 14 设 $2\leqslant z_1\leqslant z\leqslant \xi$ 及

$$\xi_j^2=\xi_{j-1}^2/p_j=\xi^2/p_1p_2\cdots p_j.$$

则对任意正整数 M 有

$$\begin{aligned}S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)&=S(\mathscr{A};\mathscr{P},z_1)\\&+\sum_{i=1}^{M-1}(-1)^i\sum_{(i;z_1,z,\xi)_1}S(\mathscr{A}^{(i)};\mathscr{P},z_1)\\&+(-1)^M\sum_{(M;z_1,z,\xi)_1}S(\mathscr{A}^{(M)};\mathscr{P},p_M)\\&+\sum_{i=1}^{M}(-1)^i\sum_{(i;z_1,z,\xi)_2}S(\mathscr{A}^{(i)};\mathscr{P},p_i),\end{aligned}\qquad(64)$$

其中 $\sum\limits_{(i;z_1,z,\xi)_1}$ 是表示对 $p_1,p_2,\cdots,p_i$ 这 i 个素变数求和，其求和范围 $(i;z_1,z,\xi)_1$ 为

$$z_1\leqslant p_i<p_{i-1}<\cdots<p_1<z,\quad p_j<\xi_j,\quad (j=1,\cdots,i),$$

$\sum\limits_{(i;z_1,z,\xi)_2}$ 是表示对 $p_1,p_2,\cdots,p_i$ 这 i 个素变数求和，其求和范围 $(i;z_1,z,\xi)_2$ 为

$$z_1\leqslant p_i<p_{i-1}<\cdots<p_1<z,\ p_j<\xi_j,$$
$$(j=1,\cdots,i-1),\quad \xi_i\leqslant p_i<\xi_i^2,$$

以及

$$\mathscr{A}^{(i)}=\mathscr{A}_{p_1p_2\cdots p_i}.$$

证 由引理 1 知

$$S(\mathscr{A};z)=S(\mathscr{A};z_1)-\sum_{z_1\leqslant p_1<z}S(\mathscr{A}^{(1)};p_1).$$

由于 $p_1<z\leqslant\xi$，所以 $\xi_1^2=\xi^2/p_1>\xi>p_1$，因而可把求和范围 $z_1\leqslant p_1<z$ 分拆为二部分：$z_1\leqslant p_1<z,\ p_1<\xi_1$；$z_1\leqslant p_1<z,\ \xi_1\leqslant p_1<\xi_1^2$，这样上式就变为

$$S(\mathscr{A};z)=S(\mathscr{A};z_1)-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_1<z\\ p_1<\xi_1}}S(\mathscr{A}^{(1)};p_1)$$

$$-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_1<z\\ \xi_1\leqslant p_1<\xi_1^2}}S(\mathscr{A}^{(1)};p_1).$$

这就证明了 (64) 式当 $M=1$ 时成立．如再对上式右边第一个和式中的每一项 $S(\mathscr{A}^{(1)};p_1)$ 应用引理 1，并作类似的分拆就有 (注意到这时 $p_2<p_1<\xi_1$，所以有 $\xi_2^2=\xi_1^2/p_2>p_2$)

$$S(\mathscr{A}^{(1)};p_1)=S(\mathscr{A}^{(1)};z_1)-\sum_{z_1\leqslant p_2<p_1}S(\mathscr{A}^{(2)};p_2)$$

$$=S(\mathscr{A}^{(1)};z_1)-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_2<p_1\\ p_2<\xi_2}}S(\mathscr{A}^{(2)};p_2)$$

$$-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_2<p_1\\ \xi_2\leqslant p_2<\xi_2^2}}S(\mathscr{A}^{(2)};p_2),$$

$$(z_1\leqslant p_1<z,\ p_1<\xi_1).$$

把此式代入前式即得

$$S(\mathscr{A};z)=S(\mathscr{A};z_1)-\sum_{(1,z_1,z,\xi)_1}S(\mathscr{A}^{(1)};z_1)$$

$$+\sum_{(2,z_1,z,\xi)_1}S(\mathscr{A}^{(2)};p_2)+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\sum_{(i,z_1,z,\xi)_2}S(\mathscr{A}^{(i)};p_i).$$

这就证明了 (64) 式当 $M=2$ 时成立．同样，如继续对上式中的第二个和式中的每一项应用引理 1，并作类似的分拆就立刻得到 (64) 式对 $M=3$ 成立．恒等式 (64) 式就是这样逐步推导出来的．我们不难用归纳法来给出一个严格的证明，这只要将 (64) 式中的第二个和式中的每一项应用引理 1，并作类似的分拆，即把求和范围 $z_1\leqslant p_{M+1}<p_M$，分拆为 $z_1\leqslant p_{M+1}<p_M$，$p_{M+1}<\xi_{M+1}$ 及

$z_1 \leqslant p_{M+1} < p_M$，$\xi_{M+1} \leqslant p_{M+1} < \xi_{M+1}^2$ 这样二部分，这样，我们立刻从 (64) 式对 M 成立推出 (64) 式对 $M+1$ 亦成立．具体的过程这里就不写了．证毕．

这里要作一点说明：对 Бухштаб 恒等式作这样的分拆是由 § 4 所证明的二个估计筛函数的基本定理所决定的．因为初始值 z_1（要相对于所有的 ξ_j，$1 \leqslant j \leqslant M$）可取得很小，这样 (64) 式右边的第一项及第一个和式中的每一项可用定理 7 得到一个精确的渐近估计．对 (64) 式右边第二个和式中的每一项，由于 $p_j < \xi_j$ $(1 \leqslant j \leqslant M)$，故利用定理 7 亦可使其平均说来得到一个好的上界和下界估计．对剩下的右边第三个和式中的每一项，我们可以利用定理 6 得到一个至今可能得到的最好的上界估计，而下界就只能用不小于零这一显然估计．通过用这样的方法来估计(64)式右边的所有各项，我们就得到了 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界及下界估计，虽然在原则上这些步骤是十分清楚的，但在形式上却很繁复，我们需要分别来讨论它们的主项和余项．

为了讨论主项，我们先证明几个引理．

从引理 4 出发，和引理 14 一样我们可以证明对 $W(z)$ 有相同的恒等式成立．

引理 15 在引理 14 的条件和符号下，我们有

$$W(z) = W(z) + \sum_{i=1}^{M-1}(-1)^i \sum_{(i,z_1,z,\xi)_1} \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} W(z_1)$$

$$+ (-1)^M \sum_{(M,z_1,z,\xi)_1} \frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M} W(p_M)$$

$$+ \sum_{i=1}^{M}(-1)^i \sum_{(i,z_1,z,\xi)_2} \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} W(p_i).$$

证明和引理 14 的方法完全一样，只要用引理 4 来代替那里用到的引理 1，故略．

引理 16 设

$$\phi_l(u) = \begin{cases} F(u), & l \equiv 1(2), \\ f(u), & l \equiv 0(2), \end{cases}$$

其中函数 $F(u)$ 和 $f(u)$ 为 § 5 中定义的函数. 若条件 (32), (33) ($\kappa = 1$) 成立,则在引理 14 的条件和符号下,对任意正整数 l 有

$$W(z)\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right) = W(z_1)\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z_1}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{M-1}(-1)^i \sum_{(i;\, z_1, z, \xi)_1} \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} W(z_1)\,\phi_{l+i}\left(\frac{\log \xi_i^2}{\log z_1}\right)$$

$$+ (-1)^M \sum_{(M;\, z_1, z, \xi)_1} \frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M} W(p_M)\phi_{l+M}\left(\frac{\log \xi_M^2}{\log p_M}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{M}(-1)^i \sum_{(i;\, z_1, z, \xi)_2} \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} W(p_i)\phi_{l+i}\left(\frac{\log \xi_i^2}{\log p_i}\right)$$

$$+ R_M, \tag{65}$$

其中

$$R_M = O\left(W(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 z_1}\right).$$

证　由引理 4, 推论 3 ($\kappa = 1$) 及 $\phi_l(u)(u \geqslant 1)$ 的有界性可得

$$\sum_{z_1 \leqslant p_1 < z} \frac{\omega(p_1)}{p_1} W(p_1)\phi_{l+1}\left(\frac{\log \xi_1^2}{\log p_1}\right)$$

$$= \int_{z_1}^{z} \phi_{l+1}\left(\frac{\log \xi^2/t}{\log t}\right) d\left(\sum_{z_1 \leqslant p_1 < t} \frac{\omega(p_1)}{p_1} W(p_1)\right)$$

$$= -W(z)\int_{z_1}^{z} \phi_{l+1}\left(\frac{\log \xi^2}{\log t} - 1\right) d\left(\frac{W(t)}{W(z)}\right)$$

$$= -W(z)\int_{z_1}^{z} \phi_{l+1}\left(\frac{\log \xi^2}{\log t} - 1\right) d\left(\frac{\log z}{\log t}\right)$$

$$+ O\left(\frac{W(z)\log z}{\log^2 z_1}\right) = -W(z)\frac{\log z}{\log \xi^2}\left[\frac{\log \xi^2}{\log z}\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\log \xi^2}{\log z_1}\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z_1}\right)\right] + O\left(\frac{W(z)\log z}{\log^2 z_1}\right).$$

上式最后一步用到了函数 F 和 f 的关系式(49)及(50),亦即(48)式[1]应用推论 3 ($\kappa = 1$), 上式可改写为

1) 这也就是 § 5 中要那样定义函数 F 和 f 的原因, 其初始值 (47) 式则是由 § 4 的二个基本定理(定理 6 和定理 7)所决定的.

$$W(z)\phi_l\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)=W(z_1)\phi_l\left(\frac{\log\xi^2}{\log z_1}\right)$$

$$-\sum_{z_1\leqslant p_1<z}\frac{\omega(p_1)}{p_1}W(p_1)\phi_{l+1}\left(\frac{\log\xi_1^2}{\log p_1}\right)$$

$$+O\left(W(z)\frac{\log z}{\log^2 z_1}\right). \tag{66}$$

再把右边的和式如同在引理 14 中所做的一样分拆为二部分就得到

$$W(z)\phi_l\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)=W(z_1)\phi_l\left(\frac{\log\xi^2}{\log z_1}\right)$$

$$-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_1<z\\ p_1<\xi_1}}\frac{\omega(p_1)}{p_1}W(p_1)\phi_{l+1}\left(\frac{\log\xi_1^2}{\log p_1}\right)$$

$$-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_1<z\\ \xi_1\leqslant p_1<\xi_1^2}}\frac{\omega(p_1)}{p_1}W(p_1)\phi_{l+1}\left(\frac{\log\xi_1^2}{\log p_1}\right)$$

$$+O\left(W(z)\frac{\log z}{\log^2 z_1}\right). \tag{67}$$

这就证明了 (65) 式对 $M=1$ 成立. 以下的证明是和引理 14 完全一样,只要用 (66) 式代替引理 1, 并继续进行类似 (67) 式的分拆, 所不同的是这里需要考虑余项, 每应用一次 (66) 式就多出一部分余项, 因而就要对所有这些余项的和进行估计. 我们把 (65) 式右边第二个和式中每一项应用 (66) 式, 并作类似 (67) 式的分拆得到

$$W(p_M)\phi_{l+M}\left(\frac{\log\xi_M^2}{\log p_M}\right)=W(z_1)\phi_{l+M}\left(\frac{\log\xi_M^2}{\log z_1}\right)$$

$$-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_{M+1}<p_M\\ p_{M+1}<\xi_{M+1}}}\frac{\omega(p_{M+1})}{p_{M+1}}\phi_{l+M+1}\left(\frac{\log\xi_{M+1}^2}{\log p_{M+1}}\right)$$

$$-\sum_{\substack{z_1\leqslant p_{M+1}<p_M\\ \xi_{M+1}\leqslant p_{M+1}<\xi_{M+1}^2}}\frac{\omega(p_{M+1})}{p_{M+1}}\phi_{l+M+1}\left(\frac{\log\xi_{M+1}^2}{\log p_{M+1}}\right)$$

$$+ O\left(W(p_M)\frac{\log p_M}{\log^2 z_1}\right).$$

把上式代入 (65) 式，经整理后，所得到的主要项正好就是 (65) 式对应于 $M+1$ 时的主项，而余项有关系式

$$R_{M+1} = R_M + O\left(\sum_{(M, z_1, z, \xi)_1} \frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M} W(p_M)\frac{\log p_M}{\log^2 z_1}\right).$$

由推论 3($\kappa = 1$) 知

$$W(p_M)\log p_M \ll W(z)\log z,$$

故得

$$R_{M+1} = R_M + O\left(\frac{W(z)\log z}{\log^2 z_1}\frac{1}{M!}\left(\sum_{z_1\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^M\right).$$

由此并利用引理 5($\kappa = 1$) 即得

$$R_{M+1} \ll W(z)\frac{\log z}{\log^2 z_1}\left(1+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i!}\left(\sum_{z_1\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^i\right)$$

$$\ll W(z)\frac{\log z}{\log^2 z_1}\exp\left(\sum_{z_1\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right) \ll W(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 z_2}.$$

这就全部证明了我们的引理.

现在，我们来证明本章的主要定理.

定理 9 当条件 (8), (33) ($\kappa = 1$) 成立时，对 $2 \leqslant z \leqslant \xi$ 有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \leqslant XW(z)\left\{F\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{(\log\xi)^{1/14}}\right)\right\} + \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|, \qquad (68)$$

及

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \geqslant XW(z)\left\{f\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{(\log\xi)^{1/14}}\right)\right\} - \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d<\xi^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_d|, \qquad (69)$$

其中 F 和 f 为 § 5 中定义的函数.

证 当 ξ 有界时，由定理 7 及 $F(u)$, $f(u)$, ($u \geqslant 1$) 的有界性

知 (68), (69) 式显然成立. 所以我们可假定

$$\xi > c_7, \tag{70}$$

c_7 为一充分大的待定常数. 其次, 当 ξ 充分大及

$$\log z \leqslant \frac{\log \xi}{\log\log \xi}$$

时, 由于有 (61), (62) 式成立, 故从定理 7 亦可推出 (68), (69) 式成立. 因而我们还可以假定

$$\exp\left(\frac{\log \xi}{\log\log \xi}\right) \leqslant z \leqslant \xi \tag{71}$$

现在我们要在条件 (70), (71) 下利用引理 14, 引理 16 从定理 6 及定理 7 来证明 (68) 及 (69) 式. 为此取

$$z_1 = \exp(\log^{\frac{7}{10}} \xi). \tag{72}$$

当 (70), (71) 式成立时, 必有

$$2 \leqslant z_1 \leqslant z \leqslant \xi. \tag{73}$$

再取自然数 M 满足条件

$$2\,\frac{(\log \xi)^{\frac{3}{10}}}{\log\log \xi} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^M \leqslant 3\,\frac{(\log \xi)^{\frac{3}{10}}}{\log\log \xi}. \tag{74}$$

下面我们将使用引理 14 及引理 16 中的符号, 并不再作一一说明.

当 $p_j < \xi_j \quad (j = 1, 2, \cdots, M)$ 时, 有

$$\xi_j^2 = \xi_{j-1}^2 / p_j > \xi_{j-1}^2 / \xi_j, \quad (j = 1, \cdots, M)$$

$(\xi_0 = \xi)$, 所以

$$\log \xi_j > \frac{2}{3} \log \xi_{j-1} \quad (j = 1, 2, \cdots, M).$$

即

$$\log \xi_j > \left(\frac{2}{3}\right)^j \log \xi \quad (j = 1, 2, \cdots, M).$$

利用 (74) 式的右半不等式, 由此及 (72) 式可得

$$\frac{\log \xi_j}{\log z_1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-j} (\log \xi)^{\frac{3}{10}} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{M-j} \log\log \xi$$

$$(j = 1, \cdots, M). \tag{75}$$

要注意的是以上三式仅在满足条件 $p_i < \xi_i (i = 1, \cdots, M)$ 时才成立。

利用引理 16 的符号 $\phi_l(u)$，显然我们只要证明

$$(-1)^{l+1}\left\{S(\mathscr{A}; z) - XW(z)\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right)\right\}$$
$$\leqslant O\left(\frac{XW(z)}{(\log \xi)^{1/14}}\right) + \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < \xi^2}} 3^{\nu_1(d)} |r_d|, \tag{76}$$

就同时证明了 (68) 及 (69) 式. 由引理 14，引理 16 我们可得

$$(-1)^{l+1}\left\{S(\mathscr{A}; z) - XW(z)\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right)\right\}$$
$$= (-1)^{l+1}\left\{S(\mathscr{A}; z_1) - XW(z_1)\phi_l\left(\frac{\log \xi^2}{\log z_1}\right)\right\}$$
$$- \sum_{i=1}^{M-1} (-1)^{l+i} \sum_{(i; z_1, z, \xi)_1} \left\{S(\mathscr{A}^{(i)}; z_1)\right.$$
$$\left. - \frac{\omega(p_1 \cdots p_i)}{p_1 \cdots p_i} XW(z_1)\phi_{l+i}\left(\frac{\log \xi_i^2}{\log z_1}\right)\right\}$$
$$- (-1)^{l+M} \sum_{(M; z_1, z, \xi)_1} \left\{S(\mathscr{A}^{(M)}; p_M)\right.$$
$$\left. - \frac{\omega(p_1 \cdots p_M)}{p_1 \cdots p_M} XW(p_M)\phi_{l+M}\left(\frac{\log \xi_M^2}{\log p_M}\right)\right\}$$
$$- \sum_{i=1}^{M} (-1)^{l+i} \sum_{(i; z_1, z, \xi)_2} \left\{S(\mathscr{A}^{(i)}; p_i)\right.$$
$$\left. - \frac{\omega(p_1 \cdots p_i)}{p_1 \cdots p_i} XW(p_i)\phi_{l+i}\left(\frac{\log \xi_i^2}{\log p_i}\right)\right\}$$
$$+ O\left(zW(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 z_1}\right) = I_0 + I_1 + I_2 + I_3$$
$$+ O\left(zW(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 z_1}\right). \tag{77}$$

我们将用定理 7 来估计 I_0, I_1 及 I_2，对 I_3 的估计则用定理 6. 在应用这些定理时我们要注意利用 (5), (6) 及 (7) 式. 此外，为了便于计算，定理 7 的主项中的误差项

$$O\left(\exp\left(-\frac{1}{6}\tau\log\tau\right)\right)$$

将用

$$O(\exp(-2\tau))$$

来代替.

(1) I_0'的估计：由定理 7 及 $\phi_l(u) = 1 + O(e^{-u})$, $u \geqslant 1$ 可得

$$I_0 \leqslant O\left(XW(z_1)\exp\left(-2\frac{\log\xi}{\log z_1}\right)\right) + R(I_0)$$

$$R(I_0) = \sum_{\substack{d \mid p(z_1) \\ d < \xi^2}} 3^{\nu_1(d)} |r_d|. \tag{78}$$

由此及推论 3 ($\kappa = 1$), (72) 式, $z \leqslant \xi$, 可得

$$\begin{aligned} I_0 &\leqslant O\left(XW(z)\frac{\log z}{\log z_1}\exp\left(-2\frac{\log\xi}{\log z_1}\right)\right) + R(I_0) \\ &= O(XW(z)\log^{\frac{3}{10}}\xi\exp(-2\log^{\frac{3}{10}}\xi)) + R(I_0) \\ &= O\left(\frac{XW(z)}{(\log\xi)^{\frac{7}{10}}}\right) + R(I_0). \end{aligned} \tag{79}$$

(2) I_1的估计：由于这里的求和范围 $(i;\ z_1, z, \xi)_1$ 满足条件 $z_1 < \xi_i$, 所以我们可利用定理 7 来估计其中每一项

$$S(\mathscr{A}^{(i)};\ z_1) - \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i}XW(z_1)\phi_{l+i}\left(\frac{\log\xi_i^2}{\log z_1}\right).$$

这时定理 7 中的 $\mathscr{A}$, ξ, z 分别以 $\mathscr{A}^{(i)}$, ξ_i, z_1 来代替. 由定理 7, $\phi_l(u) = 1 + O(e^{-u})$, $u \geqslant 1$, 并注意到 (5), (6), (7) 式可得

$$\begin{aligned} I_1 \leqslant O\Bigg(&\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{(i,\ z_1,\ z,\ \xi)_1}\frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} \\ &\times XW(z_1)\exp\left(-2\frac{\log\xi_i}{\log z_1}\right)\Bigg) + R(I_1) \end{aligned}$$

$$R(I_1) = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{(i,\ z_1,\ z,\ \xi)}\sum_{\substack{d \mid p(z_1) \\ d < \xi_i^2}} 3^{\nu_1(d)} |r_{p_1\cdots p_i d}|. \tag{80}$$

由此及推论 3 ($\kappa = 1$), (75) 式, $1 \leqslant i \leqslant M-1$, 引理 5($\kappa = 1$),

$z \leqslant \xi$, (72) 式可得

$$I_1 \leqslant O\left(XW(z)\frac{\log z}{\log z_1}\frac{1}{\log \xi}\sum_{i=1}^{M-1}\frac{1}{i}\left(\sum_{z_1 \leqslant p < z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^i\right)$$

$$+ R(I_1) = O\left(XW(z)\frac{\log^2 z}{\log^2 z_1}\frac{1}{\log \xi}\right) + R(I_1)$$

$$= O\left(\frac{XW(z)}{(\log \xi)^{4/10}}\right) + R(I_1). \tag{81}$$

(3) I_2 的估计：这里需要利用引理 13，比 I_1 的估计要复杂。同样，由于这里的求和范围 $(M; z_1, z, \xi)_1$ 满足条件 $p_M < \xi_M$，故亦可利用定理 7 来估计其中每一项

$$S(\mathscr{A}^{(M)}; p_M) - \frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M}XW(p_M)\phi_{l+M}\left(\frac{\log \xi_M^2}{\log p_M}\right),$$

这时定理 7 中的 $\mathscr{A}, \xi, z$ 分别以 $\mathscr{A}^{(M)}, \xi_M, p_M$ 来代替，这样由定理 7，$\phi_l(u) = 1 + O(e^{-u})$，$u \geqslant 1$，并注意到 (5)，(6)，(7)式可得

$$I_2 \leqslant O\left(\sum_{(M, z_1, z, \xi)_1}\frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M}XW(p_M)\exp\left(-2\frac{\log \xi_M}{\log p_M}\right)\right) + R(I_2)$$

$$R(I_2) = \sum_{(M, z_1, z, \xi)_1}\sum_{\substack{d \mid P(p_M)\\ d < \xi_M^2}} 3^{\nu_1(d)}|r_{p_1\cdots p_M d}|. \tag{82}$$

利用 $\xi_M^2 = \xi_{M-1}^2/p_M$ 有

$$I_2 \leqslant O\left(e\sum_{(M, z_1, z, \xi)_1}\frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M}\right.$$

$$\left.\times XW(p_M)\exp\left(-\frac{\log \xi_{M-1}^2}{\log p_M}\right)\right) + R(I_2). \tag{83}$$

我们来考虑"O"项中的和式，

$$\Delta = \sum_{(M, z_1, z, \xi)_1}\frac{\omega(p_1\cdots p_M)}{p_1\cdots p_M}W(p_M)\exp\left(-\frac{\log \xi_{M-1}^2}{\log p_M}\right)$$

$$= \sum_{(M-1, z_1, z, \xi)_1}\frac{\omega(p_1\cdots p_{M-1})}{p_1\cdots p_{M-1}}\sum_{\substack{z_1 \leqslant p_M < p_{M-1}\\ p_M < \xi_M}}\frac{\omega(p_M)}{p_M}$$

$$\times W(p_M)\exp\left(-\frac{\log \xi_{M-1}^2}{\log p_M}\right).$$

由于这里的求和范围满足条件：$p_{M-1} < \xi_{M-1}$，$p_M < \xi_M$，以及由条件 $p_M < \xi_M$ 可推出 $p_M < \xi_{M-1}^{2/3}$，所以我们可对上式右边的内层和应用引理 13 (取 $D = z_1$，$A = \xi_{M-1}^2$，$B = p_{M-1}$ 及 $\alpha = \frac{1}{3}$，这时 $C = \min(p_{M-1}, \xi_{M-1}^{2/3})$)，得到

$$\sum_{\substack{z_1 \leqslant p_M < p_{M-1} \\ p_M < \xi_M}} \frac{\omega(p_M)}{p_M} W(p_M) \exp\left(-\frac{\log \xi_{M-1}^2}{\log p_M}\right)$$

$$\leqslant \sum_{\substack{z_1 \leqslant p_M < p_{M-1} \\ p_M < \xi_{M-1}^{2/3}}} \frac{\omega(p_M)}{p_M} W(p_M) \exp\left(-\frac{\log \xi_{M-1}^2}{\log p_M}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{3} W(p_{M-1}) \exp\left(-\frac{\log \xi_{M-1}^2}{\log p_{M-1}}\right)\left(1 + O\left(\frac{\log \xi_{M-1}}{\log^2 z_1}\right)\right)$$

$$\leqslant \frac{e}{3} W(p_{M-1}) \exp\left(-\frac{\log \xi_{M-2}^2}{\log p_{M-1}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log \xi)^{4/10}}\right)\right).$$

上式最后一步用到了条件 $\xi_{M-2}^2 = \xi_{M-1}^2/p_{M-1}$，$\xi_i \leqslant \xi$ 及 (72) 式。由以上二式即得：

$$\Delta \leqslant \frac{e}{3}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log \xi)^{4/10}}\right)\right) \sum_{(M-1; z_1, z, \xi)_1} \cdot \frac{\omega(p_1 \cdots p_{M-1})}{p_1 \cdots p_{M-1}} W(p_{M-1}) \exp\left(-\frac{\log \xi_{M-2}^2}{\log p_{M-1}}\right).$$

这样继续应用引理 13，我们最后就得到

$$\Delta \leqslant \left(\frac{e}{3}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log \xi)^{4/10}}\right)\right)\right)^M W(z).$$

由此及 (83) 式即得

$$I_2 \leqslant O\left(\left[\frac{e}{3}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log \xi)^{4/10}}\right)\right)\right]^M X W(z)\right) + R(I_2).$$

设 $\delta = \frac{e}{3}(1 + O((\log \xi)^{-4/10}))$，把 c_7 取得充分大，使 $\delta < 1$。所以由 (74) 式所确定的 M 的下界知

$$\log(\delta^M) \leqslant \frac{\log \delta}{\log \frac{3}{2}} \log\left(\frac{2(\log \xi)^{3/10}}{\log\log \xi}\right).$$

由于

$$\frac{\log \frac{e}{3}}{\log \frac{3}{2}} < -\frac{10}{42},$$

所以只要 c_7 取得足够大时，就可使

$$\log(\delta^M) < -\frac{1}{14}\log\log\xi,$$

因而推得

$$I_2 \leqslant O\left(\frac{XW(z)}{(\log\xi)^{1/14}}\right) + R(I_2). \tag{84}$$

(4) I_3 的估计：由于这里的求和范围 $(i;\ z_1,\ z,\ \xi)_2$ 满足条件

$$\xi_i \leqslant p_i < \xi_i^2,$$

故由函数 $F(u)$ 和 $f(u)$ 的定义知，这时有

$$\phi_{l+i}\left(\frac{\log \xi_i^2}{\log p_i}\right) = \frac{2e^\gamma \log p_i}{\log \xi_i^2}, \quad l+i \equiv 1\,(2)$$

及

$$\phi_{l+i}\left(\frac{\log \xi_i^2}{\log p_i}\right) = 0, \quad l+i \equiv 0\,(2).$$

由此并注意到筛函数总是非负的，就得到

$$I_3 \leqslant \sum_{\substack{i=1 \\ l+i\equiv 1(2)}}^{M} \sum_{(i;\,z_1,\,z,\,\xi)_2} \left\{S(\mathscr{A}^{(i)};\, p_i) - \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} XW(p_i)\frac{2e^\gamma \log p_i}{\log \xi_i^2}\right\}.$$

现在我们用定理 6 $(\kappa = 1)$ 来估计其中每一项。为此，定理 6 中的 $\mathscr{A}$, ξ, z 分别取为 $\mathscr{A}^{(i)}$, ξ_i, p_i, 并注意到 (5), (6), (7) 式，我们有：

$$I_3 \leqslant O\left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{(i;\,z_1,\,z,\,\xi)} \frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i} XW(p_i)\frac{\log p_i}{\log^2 \xi_i}\right) + R(I_3),$$

$$R(I_3)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{(i,\,z_1,\,z,\,\xi)_i}\sum_{\substack{d\mid P(p_i)\\ d<\xi_i^2}}3^{\nu_1(d)}|r_{p_1\cdots p_i d}|. \tag{85}$$

利用 $W(p_i)\log p_i \ll W(z)\log z$，(即推论 3)，$\xi_i > z_1$，$(i=1,\cdots,M)$，引理 5($\kappa=1$)，$z\leqslant \xi$ 以及 (72) 式，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M}\sum_{(i,\,z_1,\,z,\,\xi)_i}\frac{\omega(p_1\cdots p_i)}{p_1\cdots p_i}XW(p_i)\frac{\log p_i}{\log^2\xi_i}\\
&\quad\ll XW(z)\frac{\log z}{\log^2 z_1}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i!}\Big(\sum_{z_1\leqslant p<z}\frac{\omega(p)}{p}\Big)^i\\
&\quad\ll XW(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 z_1}\ll\frac{XW(z)}{(\log\xi)^{1/10}},
\end{aligned}$$

因而得到

$$I_3\leqslant O\left(\frac{XW(z)}{(\log\xi)^{1/10}}\right)+R(I_3). \tag{86}$$

综合以上结果，由 (77)，(79)，(81)，(84)，(86) 式我们就得到了

$$\begin{aligned}
(-1)^{l+1}\left\{S(\mathscr{A};\,z)-XW(z)\phi_l\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)\right\}\leqslant O\left(\frac{XW(z)}{(\log\xi)^{1/14}}\right)\\
+R(I_0)+R(I_1)+R(I_2)+R(I_3).
\end{aligned} \tag{87}$$

最后，我们来估计余项．类似于 (46) 式，不难证明对任意函数 $h(d)$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z)}}h(d)&=\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z_1)}}h(d)+\sum_{z_1\leqslant p<z}\sum_{\substack{d<\xi_1^2\\ d\mid P(p_1)}}h(p_1d)\\
&=\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z_1)}}h(d)+\sum_{\substack{z_1\leqslant p_1<z\\ p_1<\xi_1}}\sum_{\substack{d<\xi_1^2\\ d\mid P(p_1)}}h(p_1d)\\
&\quad+\sum_{\substack{z_1\leqslant p_1<z\\ \xi_1\leqslant p_1<\xi_1^2}}\sum_{\substack{d<\xi_1^2\\ d\mid P(p_1)}}h(p_1d)\\
&=\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z_1)}}h(d)+\sum_{(1,\,z_1,\,z,\,\xi)_1}\sum_{\substack{d<\xi_1^2\\ d\mid P(p_1)}}h(p_1d)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{(1,z_1,z,\xi)_2}\sum_{\substack{d<\xi_1^2\\ d\mid P(p_1)}} h(p_1 d). \tag{88}$$

应用类似于引理 14 的这种分拆方法继续做下去，我们就得到

$$\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z)}} h(d) = \sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z_1)}} h(d) + \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{(i,z_1,z,\xi)_1}\sum_{\substack{d<\xi_i^2\\ d\mid P(z_1)}} h(p_1\cdots p_i d)$$

$$+\sum_{(M,z_1,z,\xi)_1}\sum_{\substack{d<\xi_M^2\\ d\mid P(p_M)}} h(p_1\cdots p_M d)$$

$$+\sum_{i=1}^{M}\sum_{(i,z_1,z,\xi)_2}\sum_{\substack{d<\xi_i^2\\ d\mid P(p_i)}} h(p_1\cdots p_i d). \tag{89}$$

现取 $h(d)=3^{\nu_1(d)}|r_d|$，由 (89)，(78)，(80)，(82)，(85) 式并注意到 $\nu_1(qd)\geqslant\nu_1(d)$ 即得

$$\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z)}} 3^{\nu_1(d)}|r_d| \geqslant R(I_0)+R(I_1)+R(I_2)+R(I_3).$$

由此及 (87) 式就得到了 (76) 式，定理证毕.

附注 1 当 $\xi<z\leqslant\xi^\lambda(\lambda>1)$ 时[1]，定理 9 亦成立. 因为这时 $f\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)=0$，所以(69)式显然成立. 从定理 6 可推出(68)式，不过这时主项中的“O”项：$O((\log\xi)^{-1/14})$ 要改为 $O(\lambda(\log\xi)^{-1})$，这时“O”中的常数和 λ 有关. 有关本节中的“O”常数要依赖于哪些参数，一般说来并不重要，我们就不一一指出了.

附注 2 在应用中，我们经常需要同时估计筛函数 $S(\mathscr{A}(q);\ \mathscr{P}(q),z)$，其中 $\mathscr{A}(q)$，$\mathscr{P}(q)$ 由(5)式给出. 只要注意到 (6)、(7) 式，由定理 9 直接就可得到所要的估计，这时，要把(68)及(69)式中的 $\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$ 换成 $\mathscr{A}(q)$，$\mathscr{P}(q)$，以及把

---

1) 这时我们不妨扩大函数 F 及 f 的定义域，使 $F(u)=\frac{2e^\gamma}{u}$，$(0<u<1)$ 及 $f(u)=0\quad(0<u<1)$

$$X,\ P(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathscr{P}}}p,\quad W(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathscr{P}}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right),\quad r_d$$

分别用

$$X(q)=\frac{\omega(q)}{q}X,\quad P(z,q)=\prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathscr{P}(q)}}p,$$

$$W(z,q)=\prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathscr{P}(q)}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right),\ r_{qd},$$

来代替，附注 1 在这里亦成立.

在定理 9 中，由函数 $F(u)$ 的递减性及函数 $f(u)$ 的递增性知，参数 ξ 相对于 z 取得愈大，对主项来说就愈能得到好的估计. 这在下界估计中尤为明显，因为当 $\xi\leqslant z$ 时，有 $f\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)=0$ 而只能得到不小于零的显然估计. 但是，在一方面，ξ 的选取必须使余项

$$\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z)}}3^{\nu_1(d)}|r_d|$$

所得的估计的阶小于主项中 $XW(z)$ 的阶时，才能得到有效估计，因此，ξ 的选取受余项估计的结果的限制，而相对于 X 不能取得太大；在另一方面，在应用中所需要的却正是 z 相对于 X 来说不太小（如 $z=X^b, 0<b<1$）的情形，这也就是要 ξ 相对于 X 来说不能取得太小，所以，估计余项是十分重要的. 应用同样的筛法，较好的余项估计就能使我们取较大的 ξ，因而得到较好的筛函数的上界及下界估计. 对此，我们证明下面的定理，以便于以后的应用.

定理 10 设 $2\leqslant z\leqslant X$，若存在正数 $0<\alpha\leqslant1$ 及 $B\geqslant0$，使余项估计

$$\sum_{\substack{d\leqslant X^\alpha\log^{-B}X\\ (d,\bar{\mathscr{P}})=1}}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}|r_d|\ll\frac{X}{\log^2X}\tag{90}$$

成立，则当条件 (8)，(33) $\kappa=1$ 成立时，有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\leqslant XW(z)\left\{F\left(\alpha\frac{\log X}{\log z}\right)\right.$$

$$+O\left(\frac{1}{(\log X)^{1/14}}\right)\Big\},\tag{91}$$

及

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\geqslant XW(z)\Big\{f\left(\alpha\frac{\log X}{\log z}\right)$$
$$+O\left(\frac{1}{(\log X)^{1/14}}\right)\Big\}.\tag{92}$$

证　在定理 9 中取 $\xi^2=X^\alpha\log^{-\beta}X$，所以对足够大的 X 一定有

$$2\leqslant z\leqslant\xi^{3/\alpha},$$

因而定理 9 成立(注意附注 1)．由 (49)，(50) 式容易推出

$$F\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)=F\left(\frac{\log X^\alpha}{\log z}\right)+O\left(\frac{\log\log X}{\log X}\right),\tag{93}$$

$$f\left(\frac{\log\xi^2}{\log z}\right)=f\left(\frac{\log X^\alpha}{\log z}\right)+O\left(\frac{\log\log X}{\log X}\right).\tag{94}$$

此外由定理 2($\kappa=1$) 及 (90) 式推得

$$\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(z)}}3^{\nu_1(d)}|r_d|\ll\frac{XW(z)}{(\log X)^{1/14}}.\tag{95}$$

利用 (93)，(94)，(95) 式，由 (68)，(69)式就立即推得(91)，(92) 式成立．对有界的 X，定理显然成立．证毕．

第八章　算术数列中素数分布的均值定理

在第七章中，我们已经知道筛法有二方面的问题：一方面是研究它的主项，这就是该章所讨论的内容；另一方面就是要估计它的余项。余项估计是一件十分复杂的事，相应于不同的数论问题就会出现不同类型的余项，对不同类型的余项就要用不同的方法来进行估计。在运用筛法研究把一个大偶数表为一个素数及一个殆素数之和的问题中，我们将会在第九章中看到，所要估计的余项正是第七章 (27) 及 (28) 式所指出的那种形式。显然，这是要研究算术数列中素数的一种类型的平均分布，这正是本章所要讨论的内容。

设 $(l, d)=1,\ d \geqslant 1$. 算术数列

$$n = l + kd,\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

中的素数分布问题是数论的中心问题之一，它有许多重要的应用。我们采用符号

$$\pi(x) = \pi(x; 1, 1) = \sum_{p \leqslant x} 1,$$

$$\pi(x; d, l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(d)}} 1,$$

$$E_0(x; d, l) = \pi(x; d, l) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{\phi(d)} \tag{1}$$

以及相应的

$$\psi(x) = \psi(x; 1, 1) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n),$$

$$\psi(x; d, l) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l(d)}} \Lambda(n),$$

$$E(x; d, l) = \psi(x; d, l) - \frac{x}{\phi(d)}. \tag{2}$$

大家知道,利用 $\pi(x; d, l)$ 及 $\psi(x; d, l)$ 的熟知的关系式,容易看出在本章所讨论的问题中,对 $E_0(x; d, l)$ 和 $E(x; d, l)$ 的研究是等价的. 为方便起见,下面将只讨论 $E(x; d, l)$(因为通过 Perron 公式,即引理 2,我们就可利用 L 函数的理论来研究它),而所得的结果对 $E_0(x; d, l)$ 相应地亦是成立的.

关于素数分布最重要最简单的结果就是熟知的素数定理.

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}),$$

亦即

$$E(x; 1, 1) \ll xe^{-c_1\sqrt{\log x}}. \tag{3}$$

进一步由 Siegel-Walfisz 定理(见第六章引理 2),对任意固定的正数 A,当 $d \leqslant \log^A x$ 时,一致地有

$$E(x; d, l) \ll xe^{-c_2\sqrt{\log x}}. \tag{4}$$

另一方面,如果广义 Riemann 假设 $(GRH)^*$ 成立,则有

$$E(x; d, l) \ll x^{\frac{1}{2}}\log^2 x \tag{5}$$

成立. 以上这些结果都只是表示在一个算术级数中素数分布的状况. 前已指出,这里所需要讨论的是形如第七章(27)及(28)式所指出的那种在一些算术级数中素数平均分布的状况. 下面将会看到(见推论 1),第七章(27)所给出的余项可归结为讨论下述形式的算术级数中素数的平均分布

$$R_0(D, x) = \sum_{d\leqslant D} \max_{y\leqslant x} \max_{(l,d)=1} |E_0(y; d, l)|, \tag{6}$$

或相应的

$$R(D, x) = \sum_{d\leqslant D} \max_{y\leqslant x} \max_{(l,d)=1} |E(y; d, l)|. \tag{7}$$

显然,由 Siegel-Walfisz 定理,即由(4)可立即推出,对任意正数 A,有

$$R(\log^A x, x) \ll xe^{-c_3\sqrt{\log x}}. \tag{8}$$

而另一方面,若 GRH 成立,则由(5)可推出,对任意正数 A,有

$$R(x^{\frac{1}{2}}\log^{-(A+2)}x, x) \ll x\log^{-A}x. \tag{9}$$

估计(8)太弱了,它实际上和(4)是一样的. 估计(9)虽好,却只

是一个假设性的结果. 我们把命题: 所有 $L(s,\chi)$ 的零点的实部都不大于 δ, $\frac{1}{2}\leqslant\delta<1$, 称为弱型广义 Riemann 假设, 简记作 GRH_δ. 1962 年,王元[134]指出,某些数论问题在 GRH_δ 成立下所得到的结果,在用下述条件来代替时亦成立,这条件就是: 设 $\eta_0=1-\delta$, 对任意给定的正数 A, 及任意的 $\eta<\eta_0$ 一定有

$$R(x^\eta, x)\ll x\log^{-A}x \tag{10}$$

成立. 所以研究形如(7)式的算术数列中素数的平均分布是十分重要的.

早在 1948 年, 匈牙利数学家 A. Rényi[99] 在其关于把大偶数表为一个素数及一个殆素数之和这一著名的开创性工作中, 利用 Линник 大筛法,首先证明了: 一定存在一个正数 η_0, 使对任意给定的正数 A 及任意的 $\eta<\eta_0$, 有(10)成立[1]. 但他没有定出 η_0 的具体数值,所以这是一个定性的结果. 关于具体定出这一常数 η_0 的历史如下: 1961 年, M. Б. Барбан[1] 及 1962 年, 潘承洞[85]分别独立地证明了可取 $\eta_0=\frac{1}{6}$ 及 $\eta_0=\frac{1}{3}$. 1962 年潘承洞[86]及 1963 年 M. Б. Барбан[2] 又都证明了可取 $\eta_0=\frac{3}{8}$. 到了 1965 年, A. И. Виноградов[131] 及 E. Bombieri[4] 分别独立地证明了可取 $\eta_0=\frac{1}{2}$ (Bombieri 的结果比这要稍强些,见定理 1). 正如上面所说的,这一结果在某些数论问题中起到了可以代替 GRH 的作用,因而这一结果,特别是 Bombieri 的工作是对解析数论的一个重要贡献,通常称这一结果为 Bombieri-Виноградов 定理. 以上所有这些结果都是利用估计 L 函数零点密度的方法(见第四章)来得到的. 1968 年, P. X. Gallagher[34] 不用 L 函数零点密度估计而直接利用复变积分法和大筛法对 Bombieri-Виноградов 定理给出了一个有价值的简化证明.

---

1) Rényi 的结果在形式上和这儿稍有不同,但在实质上是一样的.

一些数学家猜测，可取 $\eta_0=1$. 如能证明这一结果，或证明可取 η_0, $\frac{1}{2}<\eta_0<1$, 都是重要和有价值的.

我们将在下面(定理 1)，利用第四章的 L 函数零点密度估计的结果来证明 Bombieri–Виноградов 定理.

但是，对 $R(D,x)$ 的估计不能用来处理第七章 (28) 式所给出的那种余项，而对这种余项的估计正是陈景润在其著名工作[19]中，为实现他所提出的加权筛法的关键问题. 下面我们对这种余项的形式来作一分析. 设其中集合 $\mathscr{E}$ 是和一参数 x 有关，为清楚起见记作 $\mathscr{E}_x$，再设

$$g(a)=g_x(a)=\sum_{\substack{e\in\mathscr{E}_x\\ e=a}}1,$$

并假定存在一个正值函数 $E(x)$，使对所有正整数 $e\in\mathscr{E}_x$ 均有

$$e\leqslant E(x)$$

成立. 这样第七章 (28) 式所给出的余项，显然可归结为讨论下面形式的和

$$\sum_{d\leqslant D}\mu(d)3^{\nu_1(d)}\Bigg|\sum_{\substack{a<E(N)\\(a,d)=1}}g_N(a)\cdot\left(\pi(N;a,d,N)-\frac{1}{\phi(d)}\mathrm{Li}\frac{N}{a}\right)\Bigg|.$$

这就引导我们去研究一类新形式的算术数列中素数的平均分布：

$$R_0(D,x,\mathscr{E}_x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\cdot\Bigg|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)E_0(y;a,d,l)\Bigg|. \tag{11}$$

或相应的

$$R(D,x,\mathscr{E}_x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\cdot\Bigg|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)E(y;a,d,l)\Bigg|, \tag{12}$$

其中

$$E_0(y; a, d, l) = \pi(y; a, d, l) - \frac{1}{\phi(d)} \mathrm{Li} \frac{y}{a}, \tag{13}$$

$$\pi(y; a, d, l) = \sum_{\substack{ap \leqslant y \\ ap \equiv l(d)}} 1, \tag{14}$$

及

$$E(y; a, d, l) = \psi(y, a, d, l) - \frac{1}{\phi(d)} \frac{y}{a}, \tag{15}$$

$$\psi(y; a, d, l) = \sum_{\substack{an \leqslant y \\ an \equiv l(d)}} \Lambda(n). \tag{16}$$

同样，在本章所讨论的问题中，对$R_0(D, x, \mathscr{E}_x)$和 $R(D, x, \mathscr{E}_x)$的研究是等价的，我们亦将只讨论后者，而所得的结果相应地对前者亦是成立的。 本章的主要目的就是要证明（见定理 2）：当函数 $E(x)$ 及 $g_x(a)$，亦即集合 $\mathscr{E}_x$ 满足一定条件时，对任给正数A，我们有

$$R(x^{\frac{1}{2}} \log^{-B} x, x, \mathscr{E}_x) \ll x \log^{-A} x, \tag{17}$$

其中 B 为一个仅依赖于A以及函数 $E(x)$，$g_x(a)$，亦即集合 $\mathscr{E}_x$ 的正常数[88][89][90]。 我们将利用复变积分法，大筛法(第二章)及 L 函数四次中值公式(第三章)来证明这一结果。一些作者[32]也讨论了类似这种形式的均值定理。

本章所证明的这二种类型的估计，通常都称为算术数列中素数分布的均值定理，或简称为均值定理。

为了定理的证明和应用的方便起见，我们设

$$\begin{aligned} \bar{E}(x; d, l) &= \psi(x; d, l) - \frac{\psi(x)}{\phi(d)} \\ &= E(x; d, l) - \frac{1}{\phi(d)} (\psi(x) - x), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(D, x) &= \sum_{d \leqslant D} \max_{y \leqslant x} \max_{(l, d)=1} |\bar{E}(y; d, l)| \\ &= R(D, x) + O\left(\sum_{d \leqslant D} \frac{1}{\phi(d)} \max_{y \leqslant x} |\psi(y) - y|\right), \end{aligned} \tag{19}$$

相应的

$$\bar{E}_0(x;d,l)=\pi(x;d,l)-\frac{\pi(x)}{\phi(d)}$$

$$=E_0(x;d,l)-\frac{1}{\phi(d)}(\pi(x)-\mathrm{Li}\,x),\quad (20)$$

$$\bar{R}_0(D,x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}|\bar{E}_0(y;d,l)|$$

$$=R_0(D,x)+O\left(\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\phi(d)}\max_{y\leqslant x}|\pi(y)-\mathrm{Li}\,y|\right),\ (21)$$

以及

$$\bar{E}(y;a,d,l)=\psi(y;a,d,l)-\frac{1}{\phi(d)}\psi\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$=E(y;a,d,l)-\frac{1}{\phi(d)}\left(\psi\left(\frac{y}{a}\right)-\frac{y}{a}\right),\ (22)$$

$$\bar{R}(D,x,\mathscr{E}_x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\bar{E}(y;a,d,l)\right|$$

$$=R(D,x,\mathscr{E}_x)+O\left(\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\phi(d)}\max_{y\leqslant x}\right.$$

$$\left.\cdot\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a_i)\left(\psi\left(\frac{y}{a}\right)-\frac{y}{a}\right)\right|\right),\quad (23)$$

相应的

$$\bar{E}_0(y;a,d,l)=\pi(y;a,d,l)-\frac{1}{\phi(d)}\pi\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$=E_0(y;a,d,l)-\frac{1}{\phi(d)}\left(\pi\left(\frac{y}{a}\right)-\mathrm{Li}\frac{y}{a}\right),\quad (24)$$

$$\bar{R}_0(D,x,\mathscr{E}_x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}$$

$$\cdot\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\bar{E}_0(y;a,d,l)\right|$$

$$=R_0(D,x,\mathscr{E}_x)+O\left(\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\phi(d)}\max_{y\leqslant x}\right.$$

$$\cdot \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a, d)=1}} g_x(a) \left(\pi\left(\frac{y}{a}\right) - \text{Li}\,\frac{y}{a} \right) \right| \Big). \quad (25)$$

由素数定理（即 (3)），容易看出在我们所要证明的定理中对 $R(D, x)$ 和 $\bar{R}(D, x)$ 所得的估计是等价的．同样当集合 $\mathscr{E}$ 满足一定条件(这种条件在我们要证明的定理中总是满足的，见 (33)，(34) 式) 时，对 $R(D, x, \mathscr{E}_x)$ 及 $\bar{R}(D, x, \mathscr{E}_x)$ 的估计亦是等价的，而对后者的证明要简洁一些以及有时候后者的形式在应用中也较方便一些．所以下面我们的定理将对 $\bar{R}$ 来证明，而所得的结果相应地对 R 以及对 $\bar{R}_0$, R_0 也都成立．

§ 1. Bombieri–Виноградов 定理

引理 1 设 $Q \geqslant 1$, $T \geqslant 2$, $x \geqslant 2$, 我们有

$$\sum_{q \leqslant Q} \sum_{\chi_q}{}^{*} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}} x^{\beta} \ll (x^{\frac{1}{2}} Q^2 T + x(Q^2T)^{\frac{1}{3}}) \log x\, (\log QT)^9, \quad (26)$$

其中 $\rho = \beta + i\gamma$ 是 $L(s, \chi)$ 的非显明零点．

证 由第四章定理 2 易得

$$N(\sigma, T, Q) \ll (Q^2T)^{\frac{5-4\sigma}{3}} (\log QT)^9,$$

因而我们有

$$\sum_{q \leqslant Q} \sum_{\chi}{}^{*} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}} x^{\beta} \ll \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\chi}{}^{*} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T, \beta \geqslant \frac{1}{2}}} x^{\beta}$$

$$= -\int_{1/2}^{1} x^{\sigma} dN(\sigma, T, Q) = x^{\frac{1}{2}} N\left(\frac{1}{2}, T, Q\right)$$

$$+ \log x \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\sigma} N(\sigma, T, Q) d\sigma$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}} Q^2 T \log QT + (Q^2T)^{5/3} \log x (\log QT)^9$$

$$\cdot \int_{1/2}^{1} \left(\frac{x}{(Q^2T)^{4/3}} \right)^{\sigma} d\sigma,$$

由此即得 (26) 式，证毕．

定理 1 (Bombieri–Виноградов) 设 $x \geqslant 2$，对任给的正数 A，当 $B = A + 15$ 时，我们有

$$\bar{R}(x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x,\ x) \ll x\log^{-A}x, \tag{27}$$

及

$$R(x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x,\ x) \ll x\log^{-A}x, \tag{28}$$

其中 $\bar{R}$ 及 R 分别由 (19) 和 (7) 式给出。

证 熟知有

$$\psi(y;d,l) = \frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi_d}\bar{\chi}(l)\psi(y;\chi),\quad (l,d)=1,$$

以及若 χ 是模 d 的特征，χ^* 是对应于 χ 的原特征，有

$$\psi(y,\chi) = \psi(y;\chi^*) + O(\log y\log d).$$

由以上两式即得

$$\bar{E}(y;d,l) = \frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi_d\neq\chi_d^0}\bar{\chi}^*(l)\psi(y;\chi^*) + O(\log y\log d).$$

由此并利用

$$\sum_{\chi_d\neq\chi_d^0}\bar{\chi}^*(l)\psi(y;\chi^*) = \sum_{1<q\mid d}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\bar{\chi}(l)\psi(y;\chi),$$

即得

$$\begin{aligned}\bar{R}(D,x) &= \sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q\mid d}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\max_{y\leqslant x}|\psi(y;\chi)| \\ &\quad + O(D\log D\log x) \\ &= \sum_{1<q\leqslant D}\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant D\\ q\mid d}}\frac{1}{\phi(d)}\Bigg)\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\max_{y\leqslant x}|\psi(y;\chi)| \\ &\quad + O(D\log D\log x) \\ &\leqslant \log D\sum_{1<q\leqslant D}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\max_{y\leqslant x}|\psi(y;\chi)| \\ &\quad + O(D\log D\log x).\end{aligned} \tag{29}$$

这样，就把问题化成了这种形式的特征和估计。

现取 $D = x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x$, $D_1 = (\log x)^{3A+42}$，由 Siegel–Walfisz 定理（第六章引理 2）知，

$$\sum_{1<q\leqslant D_1}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\max_{y\leqslant x}|\psi(y;\chi)|\ll x(\log x)^{-A-1}. \qquad (30)$$

现在我们来估计下面形式的和:

$$I(Q)=\sum_{Q<q\leqslant Q'}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\max_{y\leqslant x}|\psi(y;\chi)|,$$

其中

$$D_1\leqslant Q<D,\quad Q<Q'\leqslant 2Q.$$

熟知,利用 $\psi(y;\chi)$ 的零点展开式(见第五章(30),取 $T=x^{\frac{1}{2}}$,并注意到第十章引理 5,6) 易得: 当 $\chi\neq\chi^0$ 时,有

$$\psi(y;\chi)\ll\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|\leqslant x^{\frac{1}{2}}}}\frac{x^{\beta}}{(1+|\gamma|)}+x^{\frac{1}{2}}\log^2 x,\quad y\leqslant x.$$

由此并利用引理 1 及 $D_1\leqslant Q<D$ 即得

$$I(Q)\ll Qx^{\frac{1}{2}}\log^2 x+\sum_{Q<q\leqslant Q'}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|\leqslant x^{\frac{1}{2}}}}\frac{x^{\beta}}{(1+|\gamma|)}$$

$$\ll Qx^{\frac{1}{2}}\log^2 x+\frac{\log^2 x}{Q}\sum_{i=0}^{[\log x]}\frac{1}{2^i}\sum_{q\leqslant 2Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|\leqslant 2^i}}x^{\beta}.$$

$$\ll Qx^{\frac{1}{2}}\log^{13}x+Q^{-\frac{1}{3}}x\log^{12}x\ll x(\log x)^{-(A+2)}.$$

由此及 (29), (30) 式即得 (27) 式, 由 (27), (19) 式及素数定理即得 (28) 式,证毕.

由(9)式知,在 GRH 下也只不过可推出定理 1 当 $B=A+2$ 时成立,所以这一结果是十分强的.

推论 1 设 $x\geqslant 2$, 对任给正数 A, 当 $B_1=2A+32$ 时, 我们有

$$\sum_{d\leqslant D}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}|\bar{E}(y;d,l)|\ll x\log^{-A}x, \qquad (31)$$

及

$$\sum_{d\leqslant D}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}|E(y;d,l)|\ll x\log^{-A}x, \qquad (32)$$

其中 $D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_1}x$.

证 设$\lambda = A + 17$，由定理 1 可得，(31)式左边

$$= \sum_{\substack{d \leqslant D \\ 3^{\nu_1(d)} \geqslant \log^\lambda x}} + \sum_{\substack{d \leqslant D \\ 3^{\nu_1(d)} < \log^\lambda x}}$$

$$\ll \frac{1}{\log^\lambda x} \sum_{\substack{d \leqslant D \\ 3^{\nu_1(d)} \geqslant \log^\lambda x}} \mu^2(d) 3^{2\nu_1(d)} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} |\bar{E}(y; d, l)|$$

$$+ \log^\lambda x \sum_{d \leqslant D} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} |\bar{E}(y; d, l)|$$

$$\ll x(\log x)^{-\lambda+1} \sum_{d \leqslant D} \frac{\mu^2(d) 3^{2\nu_1(d)}}{d} + x(\log x)^{\lambda - B_1 + 15}$$

$$\ll x(\log x)^{-\lambda+1} \sum_{n \leqslant x} \frac{d^4(n)}{n} + x(\log x)^{-A}$$

$$\ll x(\log x)^{-A}.$$

上式最后二步用到了 $\mu^2(n) 3^{2\nu_1(n)} \leqslant d^4(n)$ 及第三章引理 2，这里 $d(n)$ 为除数函数。这就证明了(31)式。同样可以证明(32)式成立，证毕。

定理 1 及推论 1 中的 $\bar{E}$，E 换成 $\bar{E}_0$，E_0 时亦成立。

§2. 一类新的均值定理

本节要在集合 $\mathscr{E}_x$，即函数 $E(x)$，$g_x(a)$ 满足一定条件下，来证明形如(17)式的一类新的均值定理。我们假定 (1) 存在一正数 α，$0 < \alpha \leqslant 1$，使

$$\frac{1}{2} \leqslant E(x) \ll x^{1-\alpha}, \tag{33}$$

(2) 存在一个正整数 r (和 x 无关)，使

$$g_x(a) \ll d^r(a)^{1)}, \tag{34}$$

---

1) 实际上只要 $g_x(a)$ 具有第三章引理 2 所刻划的除数函数 $d(a)$ 的那些性质时，定理 2 就成立。此外，根据 $g_x(a)$ 的定义，它的函数值一定只取非负整数值，但事实上从证明中容易看出 $g_x(a)$ 为任一满足条件(34)式的函数时，以下所有的定理和推论均成立。例如可以假定 $g_x(a) \ll \max(d^r(a), \log^r a)$ 等等。在第九章应用这些定理时，仅用到 $0 \leqslant g_x(a) \leqslant 1$ 这一特殊情形。

其中 $d(a)$ 为除数函数.

定理 2 设 $E(x)$, $g_x(a)$ 满足条件(33),(34)式,则对任给正数 A,当 $B=\frac{3}{2}A+2^{2r+2}+13$ 时有

$$\bar{R}(D,x,\mathscr{E}_x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\bar{E}(y;a,d,l)\right|$$
$$=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\left(\sum_{\substack{an\leqslant y\\an\equiv l(d)}}\Lambda(n)-\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\Lambda(n)\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x},\tag{35}$$

及

$$R(D,x,\mathscr{E}_x)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)E(y;a,d,l)\right|$$
$$=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\left(\sum_{\substack{an\leqslant y\\an\equiv l(d)}}\Lambda(n)-\frac{1}{\phi(d)}\frac{y}{a}\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x}\tag{36}$$

成立,其中 $D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x$.

我们将分若干引理来证明(35)式,利用素数定理由(23),(35)式立即推出(36)式. 为了简单起见,以下把 $\mathscr{E}_x$ 及 $g_x(a)$ 仍记为 $\mathscr{E}$ 及 $g(a)$,由于以 $[E(x)]+\frac{1}{2}$ 来代替 $E(x)$ 时条件(33)仍然成立,所以不妨假定函数 $E(x)$ 所取的值均为半奇数[1]. 此外,显然有

$$\bar{E}(y;a,d,l)=\bar{E}\left([y]+\frac{1}{2};a,d,l\right),$$

所以我们亦可假定 $\max\limits_{y\leqslant x}$ 中的 y 也只取半奇数.

引理 2 (Perron 公式) 设级数

1) 这一假定在这定理的证明中不需要用到. 见后面附注 5.

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s},\quad s=\sigma+it,$$

当 $\sigma>\beta$ 时绝对收敛，且当 $\sigma\to\beta+0$ 时，存在一正数 λ，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}\ll(\sigma-\beta)^{-\lambda}.$$

再设存在 x 的正的增函数 $A(x)$，使有

$$a_n\ll A(n).$$

这样，若 x 不为整数，则对任意的 $b>\beta$ 我们有

$$\sum_{n\leqslant x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(b,T)}f(w)\frac{x^w}{w}dw$$
$$+O\left(\frac{x^b}{T(b-\beta)^{\lambda}}\right)+O\left(\frac{A(2x)x\log x}{T\langle x\rangle}\right),\tag{37}$$

其中 $\langle x\rangle$ 为 x 到最近整数的距离及

$$\int_{(b,T)}=\int_{b-iT}^{b+iT}.\tag{38}$$

证明见[60]，[81]，[119]。

引理 3 在定理 2 的条件和符号下，设 A 为任意固定的正数，$D_1=\log^A x$，则有

$$\bar{R}(D,x,\mathscr{E})\leqslant\log x\max_{m\leqslant D}\sum_{D_1<q\leqslant D}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y<x}\sum_{\chi_q}{}^{*}$$
$$\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,m)=1}}g(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right).\tag{39}$$

证．当 $(a,d)=(l,d)=1$ 时，我们有

$$\psi(y;a,d,l)=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\chi_d^0(n)\Lambda(n)$$
$$+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi_d\neq\chi_d^0}\bar{\chi}(l)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}\chi(n)\Lambda(n)$$
$$=\frac{1}{\phi(d)}\psi\left(\frac{y}{a}\right)+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q|d}\sum_{\chi_q}{}^{*}\bar{\chi}(l)\chi(a)$$
$$\cdot\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\chi(n)\Lambda(n)+O\left(\frac{\log d\log y}{\phi(d)}\right).$$

由此并利用条件(33),(34)式及第三章引理2即得

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(D, x, \mathscr{E}) &= \sum_{d \leqslant D} \frac{1}{\phi(d)} \sum_{1<q \mid d} \max_{y \leqslant x} \sum_{\chi_q}{}^{*} \\
&\quad \cdot \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a, d)=1}} g(a)\chi(a) \sum_{\substack{an \leqslant y \\ (n, d)=1}} \Lambda(n)\chi(n) \right| \\
&\quad + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right) \leqslant \log x \max_{m \leqslant D} \sum_{1<q \leqslant D} \frac{1}{\phi(q)} \\
&\quad \cdot \max_{y \leqslant x} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a, m)=1}} g(a)\chi(a) \sum_{\substack{an \leqslant y \\ (n, m)=1}} \Lambda(n)\chi(n) \right| \\
&\quad + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right). \qquad (40)
\end{aligned}
$$

利用 Siegel-Walfisz 定理(第六章引理2),当 $1 < q \leqslant D_1$ 时,对 $a \leqslant x^{1-\alpha}$ 及 $\chi_q \neq \chi_q^0$ 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{an \leqslant y \\ (a, m)=1}} \Lambda(n)\chi(n) &= \sum_{an \leqslant y} \Lambda(n)\chi(n) + O(\log^2 x) \\
&\ll \frac{x}{a} e^{-c_4\sqrt{\alpha}\sqrt{\log x}}.
\end{aligned}
$$

由此及条件(33),(34),第三章引理2即得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1<q \leqslant D_1} \frac{1}{\phi(q)} \max_{y \leqslant x} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a, m)=1}} g(a)\chi(a) \sum_{\substack{an \leqslant y \\ (n, m)=1}} \Lambda(n)\chi(n) \right| \\
&\quad \ll x D_1 e^{-c_4\sqrt{\alpha}\sqrt{\log x}} \sum_{a \leqslant x^{1-\alpha}} \frac{d^r(a)}{a} \ll \frac{x}{(\log x)^{A+1}}.
\end{aligned}
$$

由此及(40)式即得(39)式,这就证明了我们的引理.

由引理3知,为了证明(35)式就只要估计(39)式右边的和式. 为此,设 $D_1 \leqslant Q < D$, $Q < Q' \leqslant 2Q$, 以 (q) 表示求和范围

$$Q < q \leqslant Q'.$$

再设 $\frac{1}{2} \leqslant E < E(x)$, $E < E' \leqslant 2E + \frac{1}{2}$, E, E' 均为半奇数,以 (a) 表示求和范围

$$E < a \leqslant E'.$$

进而我们设

$$I_m(Q,E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^*$$

$$\cdot\left|\sum_{\substack{(a)\\(a,m)=1}}g(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|.$$

由引理 3（39）式可知，为了证明（35）式就只要适当选取 h 并证明

$$I_m(Q,E)\ll x(\log x)^{-(A+3)}. \tag{41}$$

当 $E\leqslant D_1^2$ 时，由条件（34）式及第三章引理 2 易得

$$I_m(Q,E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^*\left|\sum_{\substack{(a)\\(a,m)=1}}g(a)\chi(a)\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{an\leqslant y}\Lambda(n)\chi(n)\right|+O(DD_1^2\log^3x).$$

为方便起见，现设

$$g^{(m)}(a)=\begin{cases}g(a), & (m,a)=1,\\ 0, & (m,a)>1\end{cases}$$

及

$$d_E^{(m)}(n)=\Lambda(n),\quad E\leqslant D_1^2,$$

$$d_E^{(m)}(n)=\begin{cases}\Lambda(n), & (n,m)=1,\\ 0, & (n,m)>1,\end{cases}\quad E>D_1^2.$$

这样，我们总有

$$I_m(Q,E)=I'_m(Q,E)+O(x(\log x)^{-(A+3)}), \tag{42}$$

其中

$$I'_m(Q,E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^*$$

$$\times\left|\sum_{(a)}g^{(m)}(a)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}d_E^{(m)}(n)\chi(n)\right|. \tag{43}$$

所以问题就转化为对 $I'_m(Q,E)$ 的估计．我们将利用 Perron 公式（引理 2），把 $I'_m(Q,E)$ 化为复变积分后来加以估计．为此，设

$b=1+\dfrac{1}{\log x}$, $T=x^{10}$, $s=\sigma+it$, 并令

$$d_E^{(m)}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-s},\quad \sigma>1. \tag{44}$$

由 $d_E^{(m)}(n)$ 的定义知

$$d_E^{(m)}(s,\chi)=-\frac{L'}{L}(s,\chi),\quad E\leqslant D_1^2. \tag{45}$$

在以上的符号和条件下，我们有

引理 4 在定理 2 的条件下，我们有

$$\begin{aligned}I'_m(Q,E)=\frac{1}{2\pi}\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^{*}\\ &\times\left|\int_{(b,T)}g_E^{(m)}(s,\chi)d_E^{(m)}(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds\right|\\ &+O(x(\log x)^{-(A+3)}),\end{aligned} \tag{46}$$

其中

$$g_E^{(m)}(s,\chi)=\sum_{(a)}g^{(m)}(a)\chi(a)a^{-s}. \tag{47}$$

证 由于这里 y 仅取半奇数，所以 $\frac{y}{a}$ 不是整数且 $\left\langle\frac{y}{a}\right\rangle\geqslant\frac{1}{2a}$，故由引理条件及 Perron 公式(引理 2)得

$$\begin{aligned}\sum_{an\leqslant y}d_E^{(m)}(n)\chi(n)&=\sum_{n\leqslant y/a}d_E^{(m)}(n)\chi(n)\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{(b,T)}d_E^{(m)}(s,\chi)\frac{y^s}{a^s}\frac{ds}{s}+O(x^{-3}).\end{aligned}$$

利用第三章引理 2，由此及条件 (33)，(34) 即得

$$\begin{aligned}&\sum_{(a)}g^{(m)}(a)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}d_E^{(m)}(n)\chi(n)\\ &\quad=\frac{1}{2\pi i}\int_{(b,T)}g_E^{(m)}(s,\chi)d_E^{(m)}(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds+O(x^{-2}).\end{aligned}$$

把上式代入 (43) 式即得 (46) 式，证毕.

下面我们从 (46) 式出发，分 $E\leqslant D_1^2$（引理 5）及 $E>D_1^2$（引理 6）二种情形来估计 $I'_m(Q,E)$.

引理 5 在定理 2 的条件下，当 $E\leqslant D_1^2$，$D_1\leqslant Q<D$ 时有

$$I'_m(Q, E) \ll xD_1^{-1}(\log x)^{2^{2r+2}+9} + x^{1/2}DD_1^{1/2}(\log x)^{2^{2r+1}+4}. \quad (48)$$

证　当 $E \leqslant D_1^2$ 时，由 (45) 式知，这时有

$$d_E^{(m)}(s, \chi) = -\frac{L'}{L}(s, \chi).$$

取 $M_1 = QD_1$，令

$$H = H(s, \chi) = \sum_{n \leqslant M_1} \mu(n)\chi(n)n^{-s}.$$

为简单起见，以下 d，g 分别表示 $d_E^{(m)}(s, \chi)$ 及 $g_E^{(m)}(s, \chi)$，我们有

$$gd = gd(1 - LH) + gdLH = gd(1 - LH) - gL'H. \quad (49)$$

再取 $N = 2^J$，$J = [4\log^2 x]$，则当 $\mathrm{Re}\, s = b = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时，易得

$$gd = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\chi(n)n^{-s} = G_1 + G_2 + O(x^{-3}),$$

其中

$$a(n) = \sum_{\substack{n_1 n_2 = n \\ E < n_1 \leqslant E'}} g^{(m)}(n_1)\Lambda(n_2) \ll d^{r+1}(n)\log n. \quad (50)$$

$$G_1 = \sum_{n \leqslant M_1} a(n)\chi(n)n^{-s},$$

$$G_2 = \sum_{M_1 < n \leqslant NM_1} a(n)\chi(n)n^{-s},$$

这样就有

$$\begin{aligned}
\int_{(b,T)} gd\frac{y^s}{s}ds &= \int_{(b,T)}((G_1 + G_2)(1 - LH) - gL'H) \\
&\quad \times \frac{y^s}{s}ds + O(x^{-1}) \\
&= \int_{(b,T)} G_2(1 - LH)\frac{y^s}{s}ds \\
&\quad + \int_{(\frac{1}{2},T)}(G_1 - G_1LH - gL'H) \\
&\quad \times \frac{y^s}{s}ds + O(x^{-1}),
\end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式，由上式及(46)式得到

$$
\begin{aligned}
I'_m(Q, E) \ll\ & x \log x \max_{\operatorname{Re} s=b}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*}|G_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \max_{\operatorname{Re} s=b}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \times \sum_{\chi_q}{}^{*}|1-LH|^2\right)^{1/2} \\
& + x^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \log x \max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*}|G_1|^2\right)^{1/2} \\
& + x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{4}} x \max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*}|G_1|^2\right)^{1/2} \\
& \times \max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*}|H|^4\right)^{1/4} \\
& \times\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \int_{(\frac{1}{2}, T)} \frac{|L|^4}{|s|}|ds|\right)^{1/4} \\
& + x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{4}} x \max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*}|g|^2\right)^{1/2} \cdot \\
& \times \max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*}|H|^4\right)^{1/4} \\
& \times\left(\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \int_{(\frac{1}{2}, T)} \frac{|L'|^4}{|s|}|ds|\right)^{1/4}. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

现在只要分别估计上式中的各项就可得到对 $I'_m(Q, E)$ 的估计. 首先利用第二章定理 8 及其推论 1，即大筛法，来估计上式中的各个特征和:

[1] 由 Schwarz 不等式可得

$$
|G_2|^2 \ll \log^2 x \sum_{j=D}^{J-1}\left|\sum_{2^j M_1<n \leqslant 2^{j+1} M_1} a(n) \chi(n) n^{-s}\right| .
$$

因而由第二章定理 8 的推论 1，(50)式及第三章引理 2 得

$$
\begin{aligned}
\max_{\operatorname{Re} s=b} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*}|G_2|^2 \ll\ & \log^2 x \\
& \times \sum_{j=0}^{J-1}\left(Q+\frac{2^j M_1}{Q}\right) \sum_{2^j M_1<n \leqslant 2^{j+1} M} \frac{|a(n)|^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

$$\ll \left(\frac{Q}{M_1} + \frac{\log^2 x}{Q}\right)(\log x)^{2^{2r+3}+4} \ll D_1^{-1}(\log x)^{2^{2r+3}+6}. \quad (52)$$

[2] 由于当 $\operatorname{Re} s = b = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时,

$$1 - LH = \sum_{M_1 < n \leqslant NM_1} b(n)\chi(n)n^{-s} + O(x^{-3}),$$

其中

$$b(n) = \sum_{\substack{n_1 \mid n \\ n_1 \leqslant M_1}} \mu(n_1) \ll d(n).$$

和估计 (1) 的方法完全一样,可得

$$\begin{aligned}
&\max_{\operatorname{Re} s = b} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} |1 - LH|^2 \\
&\ll \log^2 x \sum_{i=0}^{J-1} \left(Q + \frac{2^i M_1}{Q}\right) \sum_{2^i M_1 < n \leqslant 2^{i+1} M_1} \frac{|b(n)|^2}{n^2} \\
&\ll \left(\frac{Q}{M_1} + \frac{\log^2 x}{Q}\right) \log^4 x \ll D_1^{-1} \log^{10} x. \quad (53)
\end{aligned}$$

[3] 由第二章定理 8, (50) 式及第三章引理 2 可得

$$\begin{aligned}
&\max_{\operatorname{Re} s = b} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} |G_1|^2 \ll \left(Q + \frac{M_1}{Q}\right) \sum_{n \leqslant M_1} \frac{|a(n)|^2}{n} \\
&\ll \left(Q + \frac{M_1}{Q}\right)(\log x)^{2^{2r+2}+2} \ll D(\log x)^{2^{2r+2}+2}. \quad (54)
\end{aligned}$$

[4] 由于

$$H^2 = \sum_{n \leqslant M_1^2} C(n)\chi(n)n^{-s},$$

$$C(n) = \sum_{\substack{n_1 n_2 = n \\ n_1, n_2 \leqslant M_1}} \mu(n_1)\mu(n_2) \ll d(n),$$

和 [3] 一样可得

$$\begin{aligned}
&\max_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} |H|^4 \ll \left(Q + \frac{M_1}{Q}\right) \\
&\times \sum_{n \leqslant M_1^2} \frac{d^2(n)}{n} \ll QD_1^2 \log^4 x \ll DD_1^2 \log^4 x. \quad (55)
\end{aligned}$$

[5] 由 (47) 式并注意到 $E \leqslant D_1^2$, $D_1 \leqslant Q < D$, 利用第二章定理 8 及第三章引理 2 即得

$$\max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}^{*} |g|^2 \ll \left(Q+\frac{E}{Q}\right)$$

$$\times \sum_{(a)} \frac{|g^{(m)}(a)|^2}{a} \ll Q(\log x)^{2^{2r}-1}. \tag{56}$$

其次我们要用第三章 §3 定理 4 及定理 5 (L 函数的四次中值公式)分别来估计 (51) 式右边的二个积分。

[6] 利用第三章定理 4 我们有

$$\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}^{*} \int_{(\frac{1}{2},T)} \frac{|L|^4}{|s|} |ds| \ll \sum_{j=0}^{[20 \log x]} \frac{1}{2^j} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)}$$

$$\times \sum_{\chi}^{*} \int_{|t|<2^{j+1}} \left| L\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^4 dt$$

$$\ll Q \log^5 x \ll D \log^5 x. \tag{57}$$

[7] 利用第三章定理 5 我们有

$$\sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}^{*} \int_{(\frac{1}{2},T)} \frac{|L'|^4}{|s|} |ds|$$

$$\ll \sum_{j=0}^{[20 \log x]} \frac{1}{2^j} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}^{*} \int_{|t|<2^{j+1}}$$

$$\left| L'\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^4 dt \ll Q \log^9 x \ll D \log^9 x. \tag{58}$$

最后把以上所得的估计 (52)—(58) 式代入 (51) 式即得

$$I_m'(Q, E) \ll x D_1^{-1} (\log x)^{2^{2r+1}+9} + x^{1/2} Q D_1^{1/2} (\log x)^{2^{2r+1}+4}.$$

由于 $Q < D$, 故从上式推得 (48) 式, 证毕.

下面来讨论 $E > D_1^2$ 的情形.

引理 6 在定理 2 的条件下, 当 $E > D_1^2$, $D_1 \leqslant Q < D$ 时有

$$I_m'(Q, E) \ll x D_1^{-1} (\log x)^{2^{2r-1}+7/2} + x^{1/2} D (\log x)^{2^{2r-1}+\frac{5}{2}}. \tag{59}$$

证 取 $M_2 = Q^2$, $N = e^J$, $J = [4 \log^2 x]$. 当 $\operatorname{Re} s = b = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时有

$$d = d_E^{(m)}(s, \chi) = d_1 + d_2 + O(x^{-3}),$$

其中

$$d_1 = \sum_{n \leqslant M_2} d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-s},$$

$$d_2 = \sum_{M_2 < n \leqslant NM_2} d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-s}.$$

这样我们有

$$\int_{(b,T)} gd\frac{y^s}{s}ds = \int_{(b,T)} gd_2\frac{y^s}{s}ds$$

$$+ \int_{(\frac{1}{2},T)} gd_1\frac{y^s}{s}ds + O(x^{-1}).$$

由此并利用 Schwarz 不等式即得

$$I_m'(Q, E) \ll x\log x \max_{\mathrm{Re}\, s=b}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}|d_2|^2\right)^{1/2}$$

$$\times \max_{\mathrm{Re}\, s=b}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}|g|^2\right)^{1/2}$$

$$+ x^{\frac{1}{2}}\log x \max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}|d_1|^2\right)^{1/2}$$

$$\times \max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}|g|^2\right)^{1/2}. \qquad (60)$$

在现在这种情形，我们只要利用第二章定理 8 及其推论 1，即用大筛法来估计上式右边各项：

［1］由 Schwarz 不等式得

$$|d_2|^2 \ll \log^2 x \sum_{j=0}^{J-1}\left|\sum_{2^jM_2 < n \leqslant 2^{j+1}M_2} d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-s}\right|.$$

利用第二章定理 8 的推论 1 即得

$$\max_{\mathrm{Re}\, s=b}\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}|d_2|^2$$

$$\ll \log^2 x\sum_{j=0}^{J-1}\left(Q + \frac{2^jM_2}{Q}\right)\sum_{2^jM_2 < n \leqslant 2^{j+1}M_2}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}$$

$$\ll \log^4 x\left(\frac{Q}{M_2} + \frac{\log^2 x}{Q}\right) \ll Q^{-1}\log^6 x. \qquad (61)$$

【2】由第二章定理 8 可得

$$\max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} |d_1|^2 \ll \left(Q + \frac{M_2}{Q}\right) \times \sum_{n\leqslant M_2} \frac{\Lambda^2(n)}{n} \ll Q \log^2 x. \tag{62}$$

【3】由第二章定理 8，(34)式，第三章引理 2 及 $E > D_1^2$ 可得

$$\max_{\mathrm{Re}\, s=b} \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} |g|^2 \ll \left(Q + \frac{E}{Q}\right) \sum_{E<a\leqslant 2E+\frac{1}{2}} \frac{d^{2r}(a)}{a^2} \ll \left(\frac{Q}{E} + \frac{1}{Q}\right)(\log x)^{2^{2r}-1} \ll QD_1^2(\log x)^{2^{2r}-1}. \tag{63}$$

把所得到的估计 (61)，(63)，(62)，(56) 式代人 (60) 式就有

$$I'_m(Q, E) \ll xD_1^{-1}(\log x)^{2^{2r-1}+7/2} + x^{1/2}Q(\log x)^{2^{2r-1}+\frac{3}{2}}.$$

由此及 $Q < D$ 即得 (59) 式，证毕.

定理 2 的证明　由引理 5，引理 6 及 (42) 式可知，当 $D_1 \leqslant Q < D$ 时总有

$$I_m(Q, E) \ll xD_1^{-1}(\log x)^{2^{2r+2}+9} + x^{\frac{1}{2}}DD_1^{1/2}(\log x)^{2^{2r+1}+4} + x(\log x)^{-(A+3)}.$$

现取 $h = A + 2^{2r+2} + 12$，并利用 $B = \frac{3}{2}A + 2^{2r+2} + 13$，从上式即推得 (41) 式成立，这样，由 (41) 式及引理 3 就证明了 (35) 式成立，证毕.

附注 1　显然，定理 1 是定理 2 的特殊情形，这只要取 $E(x) \equiv \frac{3}{2}$，$g_x(a) \equiv 1$ 即可看出. 所以这里亦给出了定理 1 的另一种证明. 另一方面，当 $E(x) \ll \log^{c_1} x$ (c_1 为任意正常数)时，定理 2 亦容易从定理 1 推出，但在一般情形不能从定理 1 推出定理 2.

附注 2　由定理 2 的整个证明过程容易看出，若满足条件:

$$E(x) \ll \log^{c_1} x$$

则定理 2 的证明不需要引理 6.

附注 3　若定理 2 中 a 的求和范围

$$a \leqslant E(x)$$

改为

$$E_1(x) < a \leqslant E(x),$$

其中 $E_1(x)$ 满足 $\frac{1}{2} \leqslant E_1(x) \leqslant E(x)$，定理仍然成立。且从定理 2 的证明中容易看出，当

$$E_1(x) \gg x^{\delta}.$$

（其中 δ 为任意小的正数）时[1]，定理 2 的证明不需要引理 5，即可以不用 L 函数的中值公式，所以是十分简单的。而在一些应用中仅需这种情形。

附注 4 用熟知方法，容易推出当用 $E_0(y; a, d, l)$ 或 $\bar{E}_0(y; a, d, l)$ 来代替 $\bar{E}(y; a, d, l)$ 时定理 2 亦成立，即定理对 R_0 及 $\bar{R}_0$ 都成立。

附注 5 如果我们把 $\bar{R}(D, x, g_x)$ 看作为是

$$\sum_{d \leqslant D} \max_{y \leqslant x} \max_{(l, d)=1} \left| \sum_{\substack{a \leqslant E_x(y) \\ (a, d)=1}} g_x(a)\bar{E}(y; a, d, l) \right|,$$

其中 $g_x(a)$ 满足 (34) 式，而函数 $E_x(y)$（依赖于参数 x 的变量 y 的函数）满足条件

$$\frac{1}{2} \leqslant E_x(y) \leqslant x^{1-\alpha}, \quad y \leqslant x$$

α 为任一正数，$0 < \alpha < 1$，这时定理 2 仍然成立，但证明要复杂些，主要困难在于这时 a 的求和范围亦和 y 有关，需要运用二次 Perron 公式[89][2]。

附注 6 以上这些附注对以下的所有定理及推论均适用。

与推论 1 一样，从定理 2 可得

推论 2 在定理 2 的条件下，对任给正数 A，当 $B_1 = 3A + 7 \cdot 2^{2r} + 232$ 时，我们有

$$\sum_{d \leqslant D} \mu^2(d) 3^{\nu_1(d)} \max_{y \leqslant x} \max_{(l, d)=1} \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a, d)=1}} g(a)\bar{E}(y; a, d, l) \right|$$

$$\ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{64}$$

其中 $D = x^{\frac{1}{2}} \log^{-B_1} x$.

证 取 $\lambda = A + 2^{2r+1} + 146$，上式左边

$$= \sum_{\substack{d \leqslant D \\ 3^{\nu_1(d)} \geqslant \log^{\lambda} x}} + \sum_{\substack{d \leqslant D \\ 3^{\nu_1(d)} < \log^{\lambda} x}} \ll \frac{1}{\log^{\lambda} x} \sum_{d \leqslant D} \mu^2(d) 3^{2\nu_1(d)} \max_{y \leqslant x, (l, d)=1} \max$$

---

1) 事实上，只要 $E_1(x)$ 的阶比 $\log x$ 的任何次方都高就可以了。

2) 在证明这种情形时，我们需要假定 $E_x(y)$ 所取的值均为半奇数。

$$\times \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,d)=1}} g(a) \bar{E}(y; a, d, l) \right| + \log^{\lambda} x \sum_{d \leqslant D} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1}$$

$$\times \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,d)=1}} g(a) \bar{E}(y; a, d, l) \right| = I_1 + I_2.$$

由于 $B_1 = \frac{3}{2}(A + \lambda) + 2^{2r+2} + 13$，故由定理 2 即得

$$I_2 \ll x(\log x)^{-A}.$$

对 I_1 利用 $\mu^2(q) 3^{2v_1(q)} \leqslant d^4(q)$（为了避免混淆，我们把变数 d 改为 q），我们有

$$I_1 \ll (\log x)^{-1} \sum_{q \leqslant D} d^4(q) \max_{(l,d)=1} \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,q)=1}} d^r(a) \sum_{\substack{an \leqslant x \\ an \equiv l(q)}} \Lambda(n)$$

$$+ (\log x)^{-1} \sum_{q \leqslant D} \frac{d^4(q)}{\phi(q)} \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,q)=1}} d^r(a) \sum_{an \leqslant x} \Lambda(n) = I_{11} + I_{12}.$$

对 I_{11} 我们有

$$I_{11} \ll \frac{1}{(\log x)^{\lambda-1}} \sum_{q \leqslant D} d^4(q) \max_{(l,q)=1} \sum_{\substack{u \leqslant x \\ u \equiv l(q)}} d^{r+1}(u).$$

由于

$$\sum_{\substack{u \leqslant x \\ u \equiv l(q)}} d^{r+1}(u) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \bar{\chi}(l) \sum_{u \leqslant x} d^{r+1}(u) \chi(u)$$

$$\ll \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \sum_{u \leqslant x} d^{r+1}(u) \chi(u) \right|$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{v|q} \sum_{\chi_v}{}^{*} \left| \sum_{\substack{u \leqslant x \\ (u,q)=1}} d^{r+1}(u) \chi(u) \right|,$$

所以，利用第三章引理 2 及第二章定理 8 可得

$$I_{11} \ll \frac{1}{(\log x)^{\lambda-1}} \sum_{q \leqslant D} \frac{d^4(q)}{\phi(q)} \sum_{v|q} \sum_{\chi_v}{}^{*} \left| \sum_{\substack{u \leqslant x \\ (u,q)=1}} d^{r+1}(u) \chi(u) \right|$$

$$= \frac{1}{(\log x)^{\lambda-1}} \sum_{v \leqslant D} \sum_{\substack{q \leqslant D \\ v|q}} \frac{d^4(q)}{\phi(q)} \sum_{\chi_v}{}^{*} \left| \sum_{\substack{u \leqslant x \\ (u,q)=1}} d^{r+1}(u) \chi(u) \right|$$

$$= \frac{1}{(\log x)^{\lambda-1}} \sum_{v \leqslant D} \sum_{t \leqslant D/v} \frac{d^4(vt)}{\phi(vt)} \sum_{\chi_v}{}^{*} \left| \sum_{\substack{u \leqslant x \\ (u,t)=1}} d^{r+1}(u) \chi(u) \right|$$

$$\ll \frac{1}{(\log x)^{\lambda-18}} \max_{l \leqslant D} \left(\sum_{v \leqslant D} \frac{d^4(v)}{\phi(v)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_v} \left| \sum_{\substack{u \leqslant x \\ (u,l)=1}} d^{r+1}(u)\chi(u) \right| \right)$$

$$\ll (\log x)^{-\lambda+18} \max_{l \leqslant D} \left(\sum_{v \leqslant D} \frac{d^8(v)}{v} \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\sum_{v \leqslant D} \frac{v}{\phi(v)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_v} \left| \sum_{\substack{u \leqslant x \\ (u,l)=1}} d^{r+1}(u)\chi(u) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\ll (\log x)^{-\lambda+146} \left((D^2 + x) \sum_{u \leqslant x} d^{2r+2}(u) \right)^{1/2}$$

$$\ll x(\log x)^{-\lambda+2^{2r+1}+146} \ll x(\log x)^{-A}.$$

利用第三章引理 2，对 I_{12} 我们有

$$I_{12} \ll (\log x)^{-\lambda+1} \sum_{q \leqslant D} \frac{d^4(q)}{\phi(q)} \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,q)=1}} d^r(a) \frac{x}{a}$$

$$\ll x(\log x)^{-\lambda+2^r+18} \ll x(\log x)^{-A}.$$

综合以上的结果就得到 (64) 式，证毕.

和证明定理 2 完全一样，我们可以证明下面的定理[1].

定理 3 在定理 2 的条件下，再设正实函数

$$r_1(y) \ll x^{\alpha}, \quad y \leqslant x.$$

则对任给正数 A，当 $B = \frac{3}{2}A + 2^{2r+2} + 13$ 时，有

$$\sum_{d \leqslant D} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,d)=1}} g_x(a) \bar{E}(ar_1(y); a, d, l) \right|$$

$$= \sum_{d \leqslant D} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} \left| \sum_{\substack{a \leqslant E(x) \\ (a,d)=1}} g_x(a) \left(\sum_{\substack{n \leqslant r_1(y) \\ an \equiv l(d)}} \Lambda(n) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\phi(d)} \psi(r_1(y)) \right) \right| \ll \frac{x}{\log^A x}, \qquad (65)$$

其中 $D = x^{\frac{1}{2}} \log^{-B} x$.

定理 4 在定理 2 的条件下，再设正实函数

$$r_2(a) \ll \frac{x}{a}, \quad a \leqslant E(x), \quad y \leqslant x.$$

1) 下面的定理和推论将在证明第九章定理 4 时用到，其中函数 r_1 可依赖于参数 x，r_1 可依赖于参数 x 及 y，

则对任给正数 A，当 $B=\frac{3}{2}A+2^{2r+2}+13$ 时，有

$$\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\bar{E}(ar_2(a),a,d,l)\right|$$

$$=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\left(\sum_{\substack{n\leqslant r_2(a)\\an\equiv l(d)}}\Lambda(n)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\phi(d)}\psi(r_2(a))\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x},\tag{66}$$

其中 $D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x$。

同推论 2 一样，由定理 3 及定理 4 可得：

推论 3 在定理 3 的条件下，对任给正数 A，当 $B_1=3A+7\cdot 2^{2r}+232$ 时，我们有

$$\sum_{d\leqslant D}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\bar{E}(ar_1(y);a,d,l)\right|$$

$$=\sum_{d\leqslant D}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\left(\sum_{\substack{n\leqslant r_1(y)\\an\equiv l(d)}}\Lambda(n)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\phi(d)}\psi(r_1(y))\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x},\tag{67}$$

其中 $D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_1}x$。

推论 4 在定理 4 的条件下，对任给正数 A，当 $B_1=3A+7\cdot 2^{2r}+232$ 时，我们有

$$\sum_{d\leqslant D}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\bar{E}(ar_2(a);a,d,l)\right|$$

$$=\sum_{d\leqslant D}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant E(x)\\(a,d)=1}}g_x(a)\left(\sum_{\substack{n\leqslant r_2(a)\\an\equiv l(d)}}\Lambda(n)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\phi(d)}\psi(r_2(a))\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x},\tag{68}$$

其中 $D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_1}x$。

当我们分别用由 (15)，(20)，(13) 式所给出的 E，$\bar{E}_0$，E_0 来代替上面的 $\bar{E}$ 时，定理 3，定理 4 及推论 3，推论 4 都仍然成立。我们还要指出的是，定理 2 的五个附注这里都适用。

第九章　陈景润定理

在引言中我们已经详细叙述了利用筛法和算术数列中素数分布的均值定理来研究命题 $\{1, b\}$，即一个大偶数表为一个素数和一个素因子个数不超过 b 个的数之和这一重要问题的发展历史. 1966 年陈景润首先宣布他证明了命题 $\{1, 2\}$[18]，并在 1973 年发表了全部证明[19]. 这一结果通常称为陈景润定理. 最近，他进一步发展了证明命题 $\{1, 2\}$ 的方法，改进了关于一个偶数表为二个素数之和的表法的个数 $D(N)$（见第七章 § 4 (41)）的上界估计，这是一个重要的改进. 本章的目的就是要利用第七章和第八章所得到的结果来证明陈景润的这二个重要定理.

§1. 命题 {1,2}

首先，我们将证明命题 $\{1, 4\}$ 和 $\{1, 3\}$.

设 N 为一大偶数，集合

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(N) = \{a: a = N - p, p \leqslant N\}, \tag{1}$$

以及集合

$$\mathscr{P} = \{p: p \nmid N\}, \tag{2}$$

这就是第七章 § 1 例 2 所讨论的. 所以为了利用 Selberg 筛法来估计筛函数 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$，我们可取

$$X = \mathrm{Li}\, N \sim \frac{N}{\log N}$$

$$\omega(d) = \frac{d}{\phi(d)}, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1,$$

且有

$$r_d = \pi(N; d, N) - \frac{1}{\phi(d)} \mathrm{Li}\, N = E_0(N; d, N),$$

$$\mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1.$$

这时第七章的条件(8)及条件(33)均成立，且(33)式中的 $\kappa = 1$，所以这是线性的情形. 这样，我们就可以利用第七章§6的定理9和定理10来估计筛函数 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z)$，这时所对应的余项就是我们第八章定理1的推论1所讨论的.

再设 b 为一正整数，集合

$$\mathscr{A}^{[b]} = \mathscr{A}^{[b]}(N) = \{a: a \in \mathscr{A}, v_2(a) \leqslant b\}, \tag{3}$$

其中 $v_2(a)$ 表示 a 的全部素因子个数（按重数计），所以 $\mathscr{A}^{[b]}$ 是集合 $\mathscr{A}$ 中所有素因子个数不超过 b 个的元素所组成的子集. 这样，命题 $\{1, b\}$ 就是要证明：对充分大的偶数 N 必有

$$|\mathscr{A}^{[b]}| > 0. \tag{4}$$

定理1 命题 $\{1, 4\}$ 成立，且有

$$|\mathscr{A}^{[4]}| > 3.24 c(N) \frac{N}{\log^2 N},$$

其中

$$c(N) = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}. \tag{5}$$

证 显然，$a \in \mathscr{A}$，$(a, N) > 1$ 的元素个数

$$\leqslant v_1(N) \ll \log N, \tag{6}$$

其中 $v_1(N)$ 为 N 的不同素因子的个数. 由此容易看出

$$|\mathscr{A}^{[b]}| \geqslant \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ (a, P(N^{\frac{1}{b+1}}))=1}} 1 + O(v_1(N))$$

$$= S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{b+1}}) + O(\log N). \tag{7}$$

现利用第七章定理10来估计筛函数 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{b+1}})$ 的下界. 这里可取 $\alpha = \frac{1}{2}$，$B = 38$，再由第七章定理2($\kappa = 1$)及(40)知，

$$W(z) = 2c(N) \frac{e^{-\gamma}}{\log z}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right). \tag{8}$$

由此及函数 $f(u)$（见第七章§5）的连续性即得

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{v}})\geqslant 2v(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}e^{-\gamma}f\left(\frac{v}{2}\right). \quad (9)$$

其中 $o(1)$ 是当 $N\to\infty$ 时趋于零，$v>0$. 由第七章 § 5 (47) 及定理 8 可知

$$f(u)=0,\ (u\leqslant 2),\ f(u)>0,\ u>2.$$

所以要从(9)得到一个 $|\mathscr{A}^{[b]}|$ 的正的下界估计必须取 $b>3$. 为了证明命题 $\{1,b\}$，显然正整数 b 取得愈小愈好，在这里最佳可能是取 $b=4$. 故由 (7)，(9) 及第七章 (52) 即得

$$|\mathscr{A}^{[4]}|\geqslant(1+o(1))\,8\log\frac{3}{2}\,c\,(N)\,\frac{N}{\log^2 N}.$$

这就证明了我们的定理.

大家知道，为了证明命题 $\{1,4\}$ 并不需要利用第七章定理 10 和第八章定理 1 这样强的结果(见引言). 这里之所以用了这样强的定理而仅得到命题 $\{1,4\}$，是由于我们利用了关系式 (7)，即是把 $|\mathscr{A}^{[b]}|$ 直接和一个筛函数相联系起来的缘故.

Kuhn[65] 首先提出了所谓"加权筛法"，利用这种方法使得一些问题在同样的筛函数估计及同样的余项估计下，可以得到更好的结果. 对于加权筛法，不少数学家进行过许多形式的研究和改进，这里我们将不作一般的讨论，而仅在下面结合具体问题对有关的加权筛法作一个简单说明. 本章的结果都是运用加权筛法得到的，从中也可以看出它的本质和作用.

现在我们来证明命题 $\{1,3\}$. 下面的引理是最简单的加权筛法.

引理 1 设 b 为正整数，v 为正数，$v>b\geqslant 1$，我们有

$$|\mathscr{A}^{[b]}|\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\right)+O(N^{1-\frac{1}{v}}), \quad (10)$$

其中

$$\rho_1(a)=\sum_{\substack{p_1|a,\ p_1\nmid N\\ N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{b}}}}1,$$

及

$$P(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\nmid N}} p.$$

证　显然 $\rho_1(a)$ 为整数，且

$$0\leqslant\rho_1(a)<v.$$

我们设

$$\lambda^{(b)}(a)=\begin{cases}1, & \nu_2(a)\leqslant b,\\ 0, & \nu_2(a)>b,\end{cases}$$

其中 $\nu_2(a)$ 为 a 的全部素因子的个数，则有

$$|\mathscr{A}^{[b]}|=\sum_{a\in\mathscr{A}}\lambda^{(b)}(a).$$

利用 (6) 式我们容易推得

$$|\mathscr{A}^{[b]}|\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\lambda^{(b)}(a)=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,N)=1\\ (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\lambda^{(b)}(a)+O(v(N))$$

$$=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,N)=1\\ (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\mu^2(a)\lambda^{(b)}(a)+O(N^{1-\frac{1}{v}}).$$

另一方面，我们同样有

$$\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\right)=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,N)=1\\ (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\mu^2(a)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\right)+O(N^{1-\frac{1}{v}}).$$

在

$$\mu^2(a)=1,\quad (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1,\quad (a,N)=1$$

的条件下(这时 $\nu_2(a)=\nu_1(a)$)，我们有：

(1) 若 $\nu_2(a)\leqslant b$，则

$$\lambda^{(b)}(a)=1\geqslant1-\frac{1}{2}\rho_1(a);$$

(2) 若 $\nu_2(a)\geqslant b+1$，则一定有

$$\rho_1(a)\geqslant2,$$

所以亦得

$$\lambda^{(b)}(a)=0\geqslant 1-\frac{1}{2}\rho_1(a).$$

综合以上结果就证明了(10)式,证毕.

定理 2 命题 $\{1,3\}$ 成立,且有.

$$|\mathscr{A}^{[3]}|>2.64c(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

证 在引理 1 中取 $b=3$, $v=10$, 我们有

$$|\mathscr{A}^{[3]}|\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(N^{\frac{1}{10}}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\right)+O(N^{\frac{9}{10}})$$

$$=S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{10}})-\frac{1}{2}\Omega_1+O(N^{\frac{9}{10}}),\quad(11)$$

其中

$$\Omega_1=\sum_{\substack{N^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{3}}\\p_1\nmid N}}S(\mathscr{A}_{p_1};\mathscr{P},N^{\frac{1}{10}}).\quad(12)$$

由(9)知

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{10}})\geqslant 20(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}e^{-\gamma}f(5)\quad(13)$$

再由第七章§5(54)知,其中

$$5e^{-\gamma}f(5)=2\left(\log 4+\int_3^4\frac{dt}{t}\int_2^{t-1}\frac{\log(s-1)}{s}ds\right).\quad(14)$$

现在我们利用第七章定理 9 的(68)式来估计 Ω_1 中的每一项 $S(\mathscr{A}_{p_1};\mathscr{P},N^{\frac{1}{10}})$ 的上界,注意到该定理的附注 2,并取

$$\xi^2=\frac{1}{p_1}N^{\frac{1}{2}}\log^{-38}N,$$

利用(8)式即得

$$S(\mathscr{A}_{p_1};\mathscr{P},N^{\frac{1}{10}})\leqslant 20(1+o(1))c(N)$$
$$\times\frac{N}{\log^2 N}\frac{e^{-\gamma}}{p_1}F\left(5-10\frac{\log p_1}{\log N}\right)$$

$$+\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d\mid P(N^{\frac{1}{10}})}} 3^{\nu_1(d)}|r_{p_1 d}|,\quad N^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{3}},\quad p_1\nmid N,$$

其中 $o(1)$ 随 $N\to\infty$ 而趋于零. 由于这里 $N^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{3}}$，以上所有余项 $r_{p_1 d}$ 均两两不同，故由第八章定理 1 的推论 1 及素数定理可得

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &\leqslant 20(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}e^{-\gamma}\\
&\quad\times\sum_{\substack{N^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{3}}\\ p_1\nmid N}}\frac{1}{p_1}F\left(5-10\frac{\log p_1}{\log N}\right)\\
&\quad+\sum_{d\leqslant N^{\frac{1}{2}}\log^{-38}N}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}|r_d|\\
&=20(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}e^{-\gamma}\int_{N^{\frac{1}{10}}}^{N^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{u\log u}\\
&\quad\times F\left(5-10\frac{\log u}{\log N}\right)du+O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right).
\end{aligned}\qquad(15)$$

当 $N^{\frac{1}{10}}\leqslant u<N^{\frac{1}{3}}$ 时，

$$\frac{5}{3}<5-10\frac{\log t}{\log N}\leqslant 4.$$

利用第七章 §5 (51)，(52) 式，经计算可得

$$\begin{aligned}
&5e^{-\gamma}\int_{N^{\frac{1}{10}}}^{N^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{u\log u}F\left(5-10\frac{\log u}{\log N}\right)du\\
&\quad=2\log 8+2\int_3^4\frac{5\,dt}{t(5-t)}\int_2^{t-1}\frac{\log(s-1)}{s}ds.
\end{aligned}$$

由此及 (11)—(15) 式推得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(N^{\frac{1}{10}}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\right) &\geqslant 4(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}\left(\log 2\right.\\
&\quad\left.-\int_3^4\frac{2t-5}{t(5-t)}dt\int_2^{t-1}\frac{\log(s-1)}{s}ds\right)+O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right).
\end{aligned}\qquad(16)$$

最后我们来计算上式中的积分．显然有

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{2}(x-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\leqslant \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{x+1}, \quad x \geqslant 1.$$

所以

$$\int_3^4 \frac{2t-5}{t(5-t)}\, dt \int_2^{t-1} \frac{\log(s-1)}{s}\, ds$$

$$\leqslant 2\int_3^4 \frac{t-\frac{5}{2}}{t(5-t)}\, dt \int_2^{t-1} \left(\frac{s-2}{2} + \frac{s-2}{s}\right)\frac{ds}{s}$$

$$= 2\int_3^4 \frac{t-\frac{5}{2}}{t(5-t)} \left(\frac{1}{2}(t-3) + \frac{2}{t-1} - 1\right) dt$$

$$= 11\log 2 - 6\log 3 - 1. \qquad (17)$$

由此及 (11), (16) 式即得

$$|\mathscr{A}^{[3]}| \geqslant 4(1+6\log 3 - 10\log 2)(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

这就证明了我们的定理．

Richert[103], [38] 利用他的加权筛法得到了更强的结果：对充分大的偶数 N 有

$$|\mathscr{A}^{[3]}| > \frac{13}{3} c(N) \frac{N}{\log^2 N}.$$

现在，我们对加权筛法来作一简单的说明．比较 (7) 和 (10) 式，可以看出，为了用筛法来估计 $|\mathscr{A}^{[b]}|$ 的下界，(7) 式是直接去估计最简单的筛函数

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(z))=1}} 1,$$

而 (10) 式则是去估计"加权"的筛函数：

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\rho) = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(z))=1}} \rho(a),$$

即对每一个元素 a 加上了一个权函数 $\rho(a)$（原来的可看作权函数 $\rho(a)\equiv 1$）后，再进行筛选，所以这种筛法称为"加权筛法"．从以上所证明的定理 1 和定理 2 可以看出，巧妙地利用加权筛法使我们可以得到更好的结果．这里，重要的是选择权函数 $\rho(a)$ $\left(\text{定理 2 中是取 } \rho(a)=1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\right)$，权函数 $\rho(a)$ 的形式是多种多样的，它是由我们所考虑的问题来决定的．更为重要的是，引进权函数后，将使我们的估计(包括主项和余项二方面)大大复杂．例如从定理 2 可以看出，这时所要估计的不单是一个筛函数，而是一些筛函数的和(见 (12))，因而在主项和余项估计中就都产生了新的问题和困难需要加以克服．事实上，第七章定理 9 及第八章定理 1 就解决了这里定理 2 中引进权函数 $\rho(a)=1-\frac{1}{2}\rho_1(a)$ 后，所产生的困难．

现在，我们来证明命题 $\{1,2\}$，下面的引理就是陈景润为了证明命题 $\{1,2\}$ 而提出的新的加权筛法．

引理 2 设 b 为正整数，v 为正数，$v>b\geqslant 2$，我们有

$$|\mathscr{A}^{(b-1)}|\geqslant \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(N^{1/v}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)\right)+O(N^{1-\frac{1}{v}}),\tag{18}$$

其中 $\rho_1(a)$ 由引理 1 给出，

$$\rho_2(a)=\begin{cases}1, & a=p_1p_2\cdots p_b,\ N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{b}}\leqslant p_2<\cdots<p_b,\\ & (a,N)=1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

证 和引理 1 的证明相同，我们有

$$|\mathscr{A}^{(b-1)}|\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},(a,N)=1\\(a,P(N^{1/v}))=1}}\mu^2(a)\lambda^{(b-1)}(a)+O(N^{1-\frac{1}{v}}),$$

其中 $\lambda^{(b-1)}(a)$ 的定义见引理 1，及

$$\sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ (a, P(N^{\frac{1}{v}}))=1}} \left(1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a)\right)$$

$$= \sum_{\substack{a \in \mathscr{A}, (a, N)=1 \\ (a, P(N^{\frac{1}{v}}))=1}} \mu^2(a) \left(1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a)\right)$$

$$+ O(N^{1-\frac{1}{v}}).$$

在条件 $\mu^2(a) = 1$，$(a, P(N^{\frac{1}{v}})) = 1$，及$(a, N) = 1$ 之下（这时 $v_2(a) = v_1(a)$），我们有

(1) 若 $v_2(a) \leqslant b-1$，则

$$\lambda^{(b-1)}(a) = 1 \geqslant 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a),$$

(2) 若 $v_2(a) \geqslant b$，则一定有

$$\rho_1(a) \geqslant 1.$$

如果 $\rho_1(a) \geqslant 2$，则有

$$\lambda^{(b-1)}(a) = 0 \geqslant 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a);$$

如果 $\rho_1(a) = 1$，这时一定有

$$v_2(a) = v_1(a) = b,$$

所以必有

$$\rho_2(a) = 1,$$

故得

$$\lambda^{(b-1)}(a) = 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a) = 0.$$

综合以上结果即得 (18) 式，证毕.

定理 3 命题 $\{1, 2\}$ 成立，且有

$$|\mathscr{A}^{[2]}| > 0.62\, c(N) \frac{N}{\log^2 N}.$$

证 在引理 2 中取 $b = 3$，$v = 10$，并利用 (16)，(17) 式可得

$$|\mathscr{A}^{[2]}| \geqslant \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ (a, P(N^{\frac{1}{10}}))=1}} \left(1 - \frac{1}{2}\rho_1(a)\right) - \frac{1}{2}\Omega_2 + O(N^{\frac{9}{10}})$$

$$\geqslant 4(1 + 6\log 3 - 10\log 2)(1 + o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}$$

$$-\frac{1}{2}\Omega_2 + O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right), \qquad (19)$$

其中

$$\Omega_2 = \sum_{\substack{a \in \mathscr{A}, (a,N)=1 \\ (a, P(N^{\frac{1}{10}}))=1}} \rho_2(a) = \sum_{\substack{N^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{3}} \leqslant p_2 < \left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (p_1 p_2, N)=1}} \sum_{\substack{a \in \mathscr{A}, a = p_1 p_2 p_3 \\ p_2 < p_3, p_3 \nmid N}} 1. \qquad (20)$$

这样，为了证明命题 $\{1, 2\}$，就只要估计 Ω_2 的上界，由于 $a \in \mathscr{A}$ 时，$a = N - p$，$p < N$，亦即 $p = N - a$，$a < N$，所以对固定的 p_1，p_2 有

$$\sum_{\substack{a \in \mathscr{A}, a = p_1 p_2 p_3 \\ p_2 < p_3, p_3 \nmid N}} 1 = \sum_{\substack{p = N - p_1 p_2 p_3 \\ p_2 < p_3 < \frac{N}{p_1 p_2}, p_3 \nmid N}} 1.$$

因而有

$$\Omega_2 = \sum_{\substack{N^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{3}} \leqslant p_2 < \left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (p_1 p_2, N)=1}} \sum_{\substack{p = N - p_1 p_2 p_3 \\ p_2 < p_3 < \frac{N}{p_1 p_2}, p_3 \nmid N}} 1. \qquad (21)$$

这就把原来 Ω_2 是估计元素 a 的个数转化为估计素数 p 的个数. 我们考虑集合

$$\mathscr{E} = \left\{e : e = p_1 p_2, N^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{3}} \leqslant p_2 < \left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}, (p_1 p_2, N) = 1\right\},$$

及

$$\mathscr{L} = \{l : l = N - ep, e \in \mathscr{E}, ep \leqslant N\}.$$

显然有

$$|\mathscr{E}| \leqslant \sum_{N^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} < N^{\frac{1}{2}},$$

及

$$e \geqslant N^{\frac{13}{30}}, \quad e \in \mathscr{E}.$$

所以集合 $\mathscr{L}$ 中不超过 $N^{\frac{13}{30}}$ 的元素个数小于 $N^{\frac{1}{3}}$. 我们还不难看出 Ω_2 不超过集合 $\mathscr{L}$ 中的素数个数. 若仍取

$$\mathscr{P} = \{p : p \nmid N\},$$

则由以上的讨论易知

$$\Omega_2 \leqslant S(\mathscr{L}; \mathscr{P}, z) + O(N^{\frac{1}{3}}), \quad z \leqslant N^{\frac{13}{30}}. \tag{22}$$

现在我们用最简单的 Selberg 上界筛法,即第七章 § 4 定理 6′ 来估计上式右边的筛函数 $S(\mathscr{L}; \mathscr{P}, z)$ 的上界. 这里的集合 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{E}$ 就是第七章 § 1 例 3 所考虑的集合,故可取

$$X = \sum_{e \in \mathscr{E}} \mathrm{Li}\frac{N}{e}$$

$$\omega(d) = \frac{d}{\phi(d)}, \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, N) = 1.$$

所以满足第七章的条件 (8) 及 (33) $(\kappa = 1)$. 我们取 $z^2 = D = N^{\frac{1}{2}}\log^{-B}N$, $B_1 = 248$, 就有

$$S(\mathscr{L}; \mathscr{P}, D^{\frac{1}{2}}) \leqslant 8(1 + o(1))c(N)\frac{X}{\log N} + R_1 + R_2, \tag{23}$$

其中

$$R_1 = \sum_{\substack{d < D \\ (d, N)=1}} \mu^2(d) 3^{\nu_1(d)} \Big| \sum_{\substack{e \in \mathscr{E} \\ (e, d)=1}} E_0(N; e, d, N) \Big|,$$

$$R_2 = \sum_{\substack{d < D \\ (d, N)=1}} \frac{\mu^2(d) 3^{\nu_1}(d)}{\phi(d)} \sum_{\substack{e \in \mathscr{E} \\ (e, d)>1}} \mathrm{Li}\frac{N}{e}.$$

由于 $e \in \mathscr{E}$ 时, $N^{\frac{13}{30}} \leqslant e < N^{\frac{1}{3}}$, 所以

$$R_1 = \sum_{\substack{d < D \\ (d, N)=1}} \mu^2(d) 3^{\nu_1(d)} \Big| \sum_{\substack{N^{\frac{13}{30}} \leqslant a < N^{\frac{1}{3}} \\ (a, d)=1}} g(a) E_0(N; a, d, N) \Big|,$$

其中

$$g(a) = \sum_{\substack{e = a \\ e \in \mathscr{E}}} 1 \leqslant 1.$$

故由第八章定理 2 的推论 2（并注意定理 2 的附注 6，3 及 4）即得

$$R_1 \ll \frac{N}{\log^3 N}. \tag{24}$$

下面我们再来估计 R_2. 由于 $e \in \mathscr{E}$ 时，它的素因子不小于 $N^{\frac{1}{10}}$，以及 $\mu^2(q)3^{\nu_1(q)} < d^2(q)$（为了避免混淆，把变数 d 改为 q），我们有

$$\begin{aligned}
R_2 &\leqslant \sum_{q \leqslant D} \frac{d^2(q)}{\phi(q)} \sum_{\substack{a < N^{\frac{2}{3}} \\ (a,q) > N^{\frac{1}{10}}}} g(a) \operatorname{Li} \frac{N}{a} \\
&\leqslant N \sum_{q \leqslant D} \frac{d^2(q)}{\phi(q)} \sum_{\substack{a < N^{\frac{2}{3}} \\ (a,q) > N^{\frac{1}{10}}}} \frac{1}{a} \ll N^{1+\varepsilon} \sum_{q \leqslant D} \frac{1}{q} \sum_{\substack{a < N^{\frac{2}{3}} \\ (a,q) > N^{\frac{1}{10}}}} \frac{1}{a} \\
&= N^{1+\varepsilon} \sum_{q \leqslant D} \frac{1}{q} \sum_{\substack{m \mid q \\ m > N^{\frac{1}{10}}}} \sum_{\substack{a < N^{\frac{2}{3}} \\ (a,q) = m}} \frac{1}{a} \ll N^{1+2\varepsilon} \sum_{q \leqslant D} \frac{1}{q} \sum_{\substack{m \mid q \\ m > N^{\frac{1}{10}}}} \frac{1}{m} \\
&= N^{1+2\varepsilon} \sum_{N^{\frac{1}{10}} < m \leqslant D} \frac{1}{m} \sum_{\substack{q \leqslant D \\ m \mid q}} \frac{1}{q} \ll N^{\frac{9}{10}+3\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{25}$$

最后，我们来计算 X. 由素数定理知

$$\begin{aligned}
X &= (1 + o(1)) \sum_{e \in \mathscr{E}} \frac{N}{e \log \frac{N}{e}} \\
&= (1 + o(1)) N \int_{N^{\frac{1}{10}}}^{N^{\frac{1}{3}}} \frac{dt}{t \log t} \int_{N^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{N}{t}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{s \log s \log \frac{N}{ts}} \\
&= (1 + o(1)) \frac{N}{\log N} \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\log(2 - 3u)}{u(1 - u)} du,
\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $o(1)$ 当 $N \to \infty$ 时趋于零. 利用

$$\log x \leqslant \frac{1}{2}(x - 1)\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad x \geqslant 1,$$

可得

$$\log(2 - 3u) \leqslant \frac{3}{2} \frac{(1 - 3u)(1 - u)}{(2 - 3u)}, \quad \frac{1}{10} \leqslant u \leqslant \frac{1}{3}.$$

所以

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\log(2-3u)}{u(1-u)}\,du < \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{1-3u}{u(2-3u)}\,du$$

$$= \frac{3}{4}(2\log 10 - \log 3 - \log 17). \qquad (27)$$

因而得到

$$X < \frac{3}{4}(2\log 10 - \log 3 - \log 17)(1 + o(1))\frac{N}{\log N}. \quad (28)$$

由 (22), (23), (24), (25) 及 (28) 式就得到了 Ω_2 的上界估计

$$\Omega_2 < 6(2\log 10 - \log 3 - \log 17)(1 + o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N},$$

由此及 (19) 式就证明了我们的定理.

陈景润[19]更精确的计算积分 (27) 式,得到

$$|\mathscr{A}^{(2)}| > 0.67\, c(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

最近,他进一步改进了 Ω_2 的结构,证明了[19]

$$|\mathscr{A}^{(2)}| > 0.81\, c(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

不断改进这里下界估计的系数是有意义的,但从圆法对偶数 Goldbach 猜想的探讨来看(见第十一章 (9), (7) 式),目前的结果仍是太小,可能要大于 2 才会有价值.

从定理 1、定理 2 到定理 3,我们清楚地看出了加权筛法的作用. 取 $\rho(a) = 1$ (即不加权) 时,我们仅能得到命题 $\{1, 4\}$,取 $\rho(a) = 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a)$,就得到了命题 $\{1, 3\}$,而取

$$\rho(a) = 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a),$$

就证明了命题 $\{1, 2\}$. 所以对同一个问题,选取不同的权函数就可以得到不同的结果. 但是权函数取得愈复杂,我们的估计就愈困难. 陈景润所提出的加权筛法的基本困难就在于实现对 Ω_2 的估计. 如果我们用估计定理 2 中 Ω_1 (见 (12)) 的办法来估计由 (20) 所表示的 Ω_2,那就要去估计筛函数的和:

$$\sum_{e\in\mathscr{E}} S(\mathscr{A}_e;\mathscr{P},p_2).$$

对此，我们只能用第七章定理 9 去估计其中每一个筛函数，但由于 $e\in\mathscr{E}$ 时，$e<N^{\frac{2}{3}}$，可以取大于 $N^{\frac{1}{2}}$ 的值，所以在估计总的余项时，就产生了 Bombieri-Виноградов 均值定理（即第八章定理 1 及推论 1）所不能克服的困难[1]. 陈景润巧妙地把 Ω_2 原来的表示式 (20) 变为表示式 (21)，把原来是估计元素 a 的个数转化为估计素数 p 的个数. 这样，他就利用最简单的 Selberg 上界筛法来估计 Ω_2，并首先用他的极有创造性的方法，克服了估计余项的困难，实现了对 Ω_2 的估计，并证明了命题 $\{1,2\}$. 后来，我们[88-90]在命题 $\{1,2\}$ 的简化证明中明确指出，估计 Ω_2 的关键实质上就是第八章的新的均值定理——定理 2，这一点也可以从这里所给出的证明中清楚地看到.

显然，利用陈景润的加权筛法不可能证明命题 $\{1,1\}$，因为这时要在引理 2 中取 $b=2$，而这使得在估计主项和余项时出现至今仍然无法克服的困难.

§2. $D(N)$ 上界估计的改进

设 N 为偶数，$D(N)$ 为 N 表为二个素数之和的表法的个数. 我们在第七章 § 4 (41) 中证明了

$$D(N)\leqslant 8\,c(N)\frac{N}{\log^2 N}\left(1+O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right).$$

一直到不久以前这还是最好的结果，它是由 Bombieri 和 Davenport[5] 在 1966 年得到的. 上述结果中的系数 8 也是随筛法和均值定理的发展而逐步改进的. 1949 年 A. Selberg[212] 证明了系数可取为 16，1964 年潘承洞[87]证明了系数可取为 12，而在 GRH 下，1962 年王元[244]证明了系数可取为 8. 对系数 8 作进一步的改进是一个

1) 一些数学家曾相继指出，只要第八章的均值估计式对 $\eta_0=\frac{4}{7}$，0.546 及 0.531 成立时，命题 $\{1,2\}$ 就成立.

十分困难的问题. 最近，陈景润[20]发展了他在证明命题 {1, 2} 中所提出的加权筛法，证明了：对充分大的偶数 N 有

$$D(N) < 7.8342\, c(N) \frac{N}{\log^2 N}. \tag{29}$$

他通过巧妙地应用 Бухштаб 恒等式及 Бухштаб[10] 关于不超过 x 且不含有小于 z 的素因子的自然数个数的渐近公式[1]（引理 4）实现了这一估计. 诚然，证明的关键之一仍是第八章 § 2 的一类新的均值定理（这里要用到推论 3 及推论 4 的形式）. 为了得到上述较好的估计，他运用了反复叠代的方法，因而计算是很复杂的. 我们这里要给出一个较为简单的方法，证明下面的定理.

定理 4 对充分大的 N，我们有

$$D(N) < 7.928 C(N) \frac{N}{\log^2 N}. \tag{30}$$

下面分若干引理来证明这一结果.

引理 3 设连续函数 $w(u)$（见第七章 § 5 (57)）满足方程

$$\begin{cases} w(u) = \dfrac{1}{u}, & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ (uw(u))' = w(u-1), & u > 2, \end{cases} \tag{31}$$

则有

$$w(u) < \frac{1}{1.763}, \quad u \geqslant 2. \tag{32}$$

证 由定义容易推得

$$w(u) = \frac{1 + \log(u-1)}{u}, \quad 2 \leqslant u \leqslant 3,$$

故有

$$w'(u) = \frac{1 - (u-1)\log(u-1)}{u^2(u-1)}, \quad 2 < u < 3.$$

显见，在区间 $2 \leqslant u \leqslant 3$ 上，函数 $w(u)$ 在点 u_0 处取最大值，u_0 满足

$$(u_0 - 1)\log(u_0 - 1) = 1.$$

1) 亦可参看 [71].

不难算得

$$2.763 < u_0 < 2.77.$$

所以我们有

$$w(u) \leqslant w(u_0) = \frac{1 + \log(u_0 - 1)}{u_0}$$

$$= \frac{1}{u_0 - 1} < 1.763, \quad 2 \leqslant u \leqslant 3.$$

现用归纳法，设 $k \geqslant 3$ 为正整数，假设

$$w(u) < \frac{1}{1.763}, \quad 2 \leqslant u \leqslant k$$

成立，则由定义知

$$uw(u) - kw(k) = \int_k^u w(t-1)dt, \quad k \leqslant u \leqslant k+1,$$

所以有

$$w(u) < \frac{1}{1.763} - \frac{k}{u}\left(\frac{1}{1.763} - w(k)\right)$$

$$< \frac{1}{1.763}, \quad k \leqslant u \leqslant k+1.$$

引理证毕.

引理 4 设 $w(u)$ 是引理 3 中定义的函数，

$$x > 1, \quad z = x^{\frac{1}{u}}, \quad u \geqslant 1,$$

则对 $u \geqslant 1$ 一致地有

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ (n, P_1(z))=1}} 1 = w(u)\frac{x}{\log z} + O\left(\frac{x}{\log^2 z}\right) + O\left(\frac{z}{\log z}\right) \tag{33}$$

成立，其中

$$P_1(z) = \prod_{p < z} p.$$

证 用归纳法证明. 当 $1 \leqslant u \leqslant 2$ 时，由素数定理知 (33) 式成立. 假设当 $k \leqslant u \leqslant k+1$ ($k \geqslant 1$, 整数)时，(33) 式成立. 我们来证明当 $k+1 \leqslant u \leqslant k+2$ 时，(33) 式亦成立. 为此设

$$\mathscr{N} = \{n : 1 \leqslant n \leqslant x\}, \mathscr{P}_1 = \{p\}.$$

这样就有

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ (n, P_1(z))=1}} 1 = S(\mathscr{N}; \mathscr{P}_1, z).$$

由 Бухштаб 恒等式(第七章 § 1 引理 1) 知，

$$S(\mathscr{N}; \mathscr{P}_1, x^{\frac{1}{u}}) = S(\mathscr{N}; \mathscr{P}_1, x^{\frac{1}{k+1}}) + \sum_{x^{\frac{1}{u}} \leqslant p < x^{\frac{1}{k+1}}} S(\mathscr{N}_p; \mathscr{P}_1, p),$$

$$k + 1 \leqslant u \leqslant k + 2. \tag{34}$$

由于

$$k \leqslant \left(\log \frac{x}{p}\right) \Big/ \log p = \frac{\log x}{\log p} - 1 \leqslant k + 1,$$

$$x^{\frac{1}{k+2}} \leqslant p \leqslant x^{\frac{1}{k+1}},$$

所以利用归纳假设，并注意到 $p = \left(\frac{x}{p}\right)^{\log p / \log \frac{x}{p}}$，及

$$\mathscr{N}_p = \left\{n: n = pn', 1 \leqslant n' \leqslant \frac{x}{p}\right\},$$

从 (34)，(33)，(31) 式及素数定理即得

$$S(\mathscr{N}; \mathscr{P}_1, x^{\frac{1}{u}}) = \omega(k+1) \frac{x}{\log x^{\frac{1}{k+1}}} + O\left(\frac{x}{(\log x^{\frac{1}{k+1}})^2}\right)$$

$$+ O\left(\frac{x^{\frac{1}{k+1}}}{\log x^{\frac{1}{k+1}}}\right) + \sum_{x^{\frac{1}{u}} \leqslant p < x^{\frac{1}{k+1}}} \omega\left(\frac{\log \frac{x}{p}}{\log p}\right) \frac{\frac{x}{p}}{\log p}$$

$$+ O\left(\sum_{x^{\frac{1}{u}} \leqslant p < x^{\frac{1}{k+1}}} \left(\frac{x}{p \log^2 p} + \frac{p}{\log p}\right)\right)$$

$$= (k+1)\omega(k+1) \frac{x}{\log x}$$

$$+ \int_{x^{\frac{1}{u}}}^{x^{\frac{1}{k+1}}} \omega\left(\frac{\log x}{\log t} - 1\right) \frac{x}{t \log^2 t} \, dt$$

$$+O\left(\int_{x^{\frac{1}{u}}}^{x^{\frac{1}{k+1}}}\left(\frac{x}{t\log^3 t}+\frac{t}{\log^2 t}\right)dt\right)$$

$$+O\left(\frac{x}{(\log x^{\frac{1}{k+1}})^2}\right)=\frac{x}{\log x}\left((k+1)\omega(k+1)\right.$$

$$\left.+\int_{k+1}^{u}\omega(t-1)dt\right)+O\left(\frac{x}{(\log x^{\frac{1}{u}})^2}\right)$$

$$=\omega(u)\frac{x}{\log x^{\frac{1}{u}}}+O\left(\frac{x}{(\log x^{\frac{1}{u}})^2}\right).$$

这就证明了，当 $k+1\leqslant u\leqslant k+2$ 时，(33) 式亦成立. 证毕.

显见，当 $u\geqslant u_0>1$ 时，(33) 式中 $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ 这一项可不要.

下面的引理是 Бухштаб 恒等式的一个应用.

引理 5 设集合 $\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$ 由 (1)，(2) 所给出，$v\geqslant u>1$，我们有[1)]

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{u}})=S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{v}})$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ p_1\nmid N}}S(\mathscr{A}_{p_1};\mathscr{P},N^{\frac{1}{v}})$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ p_1\nmid N}}S(\mathscr{A}_{p_1};\mathscr{P}(p_1),N^{\frac{1}{v}})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ (p_1p_2p_3,N)=1}}S(\mathscr{A}_{p_1p_2p_3};\mathscr{P}(p_2),p_3)$$

$$+O(N^{1-\frac{1}{v}}).\tag{35}$$

证 由 Бухштаб 恒等式知

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{u}})=S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{v}})$$

1) 符号 $\mathscr{P}(q)$ 的定义见第七章 §1(5).

$$-\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{u}} \\ p_1 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, p_1).$$

对上面和式中的每一项再用一次 Бухштаб 恒等式，有

$$\frac{1}{2} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, p_1) = \frac{1}{2} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{v}})$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_2 < p_1 \\ p_2 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1 p_2}; \mathscr{P}, p_2),$$

$$N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{u}}, \quad p_1 \nmid N.$$

由以上二式即得

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{u}}) = S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{v}})$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{u}} \\ p_1 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{v}}) + M_1, \qquad (36)$$

其中

$$M_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_2 < p_1 < N^{\frac{1}{u}} \\ (p_1 p_2, N) = 1}} S(\mathscr{A}_{p_1 p_2}; \mathscr{P}, p_2)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{u}} \\ p_1 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, p_1). \qquad (37)$$

再对 (37) 式右边的二个和式中的每一项，适当的运用 Бухштаб 恒等式可使之互相抵消一部分，我们有

$$S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, p_1) = S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}(p_1), N^{\frac{1}{u}})$$

$$+ \sum_{\substack{p_1 \leqslant p_3 < N^{\frac{1}{u}} \\ p_3 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1 p_3}; \mathscr{P}(p_1), p_3),$$

$$N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{u}}, \quad p_1 \nmid N,$$

及

$$
\begin{aligned}
S(\mathscr{A}_{p_1p_2};\mathscr{P},p_2)&=S(\mathscr{A}_{p_1p_2};\mathscr{P}(p_2),p_1)\\
&\quad+\sum_{\substack{p_2<p_3<p_1\\ p_3\nmid N}}S(\mathscr{A}_{p_1p_2p_3};\mathscr{P}(p_2),p_3),
\end{aligned}
$$

$$
N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_2<p_1<N^{\frac{1}{u}},\quad (p_1p_2,N)=1.
$$

把以上二式代入 (37) 式，即得

$$
\begin{aligned}
M_1=&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ p_1\nmid N}}S(\mathscr{A}_{p_1};\mathscr{P}(p_1),N^{\frac{1}{u}})\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_2\leqslant p_3<p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ (p_1p_2p_3,N)=1}}S(\mathscr{A}_{p_1p_2p_3};\mathscr{P}(p_2),p_3)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ p_1\nmid N}}S(\mathscr{A}_{p_1^2};\mathscr{P},p_1).
\end{aligned}\tag{38}
$$

由于

$$
\sum_{d\geqslant N^{\frac{1}{v}}}|\mathscr{A}_{d^2}|\ll N^{1-\frac{1}{v}},
$$

由此及 (38)，(36) 式即推得 (35) 式，证毕.

不难看出，(35) 式可以写成下面的形式

$$
\begin{aligned}
S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{u}})=&\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(N^{\frac{1}{v}}))=1}}\Big(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)\\
&-\frac{1}{2}\rho_2(a)+\frac{1}{2}\rho_3(a)\Big)+O(N^{1-\frac{1}{v}}),
\end{aligned}\tag{39}
$$

其中

$$
\rho_1(a)=\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ p_1|a,\ p_1\nmid N}}1,\quad \rho_2(a)=\sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{u}}\\ p_1|a,\ p_1\nmid N,\ (a,\frac{1}{p_1}P(N^{\frac{1}{u}}))=1}}1,
$$

以及

$$\rho_3(a) = \sum_{\substack{N^{\frac{1}{v}} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{\frac{1}{u}} \\ p_1 p_2 p_3 | a,\ (p_1 p_2 p_3, N) = 1 \\ \left(a, \frac{1}{p_2} P(p_3)\right) = 1}} 1.$$

如同引理 1，引理 2 一样，(39) 式可以直接加以证明. 所以引理 5 实际上亦为加权筛法，由此也可看出加这类权筛法和 Бухштаб 恒等式之间的联系.

引理 6 设集合 $\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$ 由 (1)，(2) 式给出，我们有

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{7}}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{3}} \\ p_1 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, N^{\frac{2}{7}})$$

$$\leqslant 8(1 + o(1)) c(N) \frac{N}{\log^2 N} \left\{ 1 + \int_2^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_{1.5}^{2.5} \frac{\log\left(2.5 - \dfrac{3.5}{t+1}\right)}{t} dt \right\}, \tag{40}$$

其中 $o(1)$ 当 $N \to \infty$ 时趋于零.

证 由第七章定理 10 的 (91) 式，第八章定理 1 的推论 1，第七章 (53) 式，以及 (8) 式可得[1)]

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{7}}) \leqslant 8(1 + o(1)) c(N) \frac{N}{\log^2 N}$$

$$\times \left(1 + \int_2^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt \right). \tag{41}$$

再由第七章定理 9 的 (69) 式(注意附注 2)，第七章 (52) 式，以及 (8) 式可得

$$S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{7}}) \geqslant 8(1 + o(1)) c(N) \frac{N}{\log^2 N}$$

$$\times \left[\log\left(2.5 - 3.5 \frac{\log p_1}{\log N^{\frac{1}{2}}}\right) \right] \Big/ \left[p_1 \left(1 - \frac{\log p_1}{\log N^{\frac{1}{2}}}\right) \right]$$

---

1) 由于对所讨论的集合 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{P}$，第七章的定理 9、10 及第八章定理 1、2 等已应用过多次，所以如何选择这些定理中的参数就不一一写出来了. 以下同.

$$- \sum_{\substack{p_1 d < N^{\frac{1}{2}} \log^{-B_1} N \\ d \mid P(N^{\frac{1}{7}})}} 3^{\nu_1(d)} |r_{p_1 d}|,$$

$$N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{5}}, \quad p_1 \nmid N.$$

利用第八章定理 1 的推论 1 及素数定理可得

$$\sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_1 < N^{\frac{1}{5}} \\ p_1 \nmid N}} S(\mathscr{A}_{p_1}; \mathscr{P}, N^{\frac{1}{7}}) \geqslant 8(1 + o(1))c(N)$$

$$\times \frac{N}{\log^2 N} \int_{1.5}^{2.5} \frac{\log\left(2.5 - \frac{3.5}{t+1}\right)}{t} dt. \qquad (42)$$

由 (41), (42) 式就推出 (40) 式，证毕.

引理 7 设集合 $\mathscr{A}$, $\mathscr{P}$ 由 (1), (2) 给出，我们有

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{\frac{1}{5}} \\ (p_1 p_2 p_3, N) = 1}} S(\mathscr{A}_{p_1 p_2 p_3}; \mathscr{P}(p_2), p_3)$$

$$\leqslant 8(1 + o(1))c(N) \frac{X}{\log N} + O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right), \qquad (43)$$

其中 $o(1)$ 当 $N \to \infty$ 时趋于零，

$$X = \sum_{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{\frac{1}{5}}} \sum_{\substack{1 \leqslant n < N/p_1 p_2 p_3 \\ (n, NP(p_3)) = 1}} 1. \qquad (44)$$

证 我们用定理 3 中估计 Ω_2 的办法来估计 Ω_3. 我们有

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{\frac{1}{5}} \\ (p_1 p_2 p_3, N) = 1}} \sum_{\substack{a \in \mathscr{A}, p_1 p_2 p_3 \mid a \\ \left(a, \frac{N}{p_2} P(p_3)\right) = 1}} 1 + O(N^{\frac{4}{5}})$$

$$= \sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{\frac{1}{5}} \\ (p_1 p_2 p_3, N) = 1}} \sum_{\substack{p = N - p_1 p_2 p_3 n \\ 1 \leqslant n < \frac{N}{p_1 p_2 p_3}, \left(n, \frac{N}{p_2} P(p_3)\right) = 1}} 1$$

$$+ O(N^{\frac{4}{5}}) = \Omega_3' + O(N^{\frac{4}{5}}), \qquad (45)$$

其中

$$\Omega_3' = \sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < N^{\frac{1}{5}} \\ (p_2 p_3, N) = 1}} \sum_{\substack{1 \leqslant n < N/p_2 p_3^2 \\ \left(n, \frac{N}{p_2} P(p_3)\right) = 1}} \sum_{\substack{p = N - (p_2 p_3 n) p_1 \\ p_3 < p_1 < \min(N^{\frac{1}{5}}, N/p_2 p_3 n), (p_1, N) = 1}} 1.$$

现在考虑集合

$$\mathscr{E} = \left\{ e : e = n p_2 p_3, N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < N^{\frac{1}{5}}, (p_2 p_3, N) = 1, \right.$$
$$\left. 1 \leqslant n \leqslant \frac{N}{p_2 p_3^2}, \left(n, \frac{N}{p_2} P(p_3)\right) = 1 \right\},$$

及

$$\mathscr{L} = \left\{ l : l = N - e p_1, e \in \mathscr{E}, p_3 < p_1 < \min\left(N^{\frac{1}{5}}, \frac{N}{e}\right) \right\}.$$

显然，$(\mathscr{E}, N) = 1$. 再由于

$$N^{\frac{2}{7}} < e < N^{\frac{6}{7}}, \quad e \in \mathscr{E},$$

及

$$|\mathscr{E}| \ll N^{\frac{6}{7}},$$

所以集合 $\mathscr{L}$ 中不大于 $N^{\frac{2}{7}}$ 的元素个数 $\ll N^{\frac{6}{7}}$. 由于 Ω_3' 小于集合 $\mathscr{L}$ 中素数个数因而我们有

$$\Omega_3 \leqslant S(\mathscr{L}; \mathscr{P}, z) + O(N^{\frac{6}{7}}), \quad z \leqslant N^{\frac{2}{7}}, \qquad (46)$$

这里 $\mathscr{L}$，$\mathscr{P}$ 就是第七章 § 1 例 3 所讨论的那种类型的集合. 这样我们就可选取

$$X_1 = \sum_{e \in \mathscr{E}} \sum_{p_3 < p_1 < \min\left(N^{\frac{1}{5}}, \frac{N}{e}\right)} 1$$
$$= \sum_{\substack{N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{\frac{1}{5}} \\ (p_2 p_3, N) = 1}} \sum_{\substack{1 \leqslant n < N/p_1 p_2 p_3 \\ \left(n, \frac{N}{p_2} P(p_3)\right) = 1}} 1 = X + O(N^{\frac{6}{7} + \varepsilon}). \qquad (47)$$

现在我们用第七章 § 4 定理 6′ 来估计筛函数 $S(\mathscr{L}; \mathscr{P}, z)$，取 $z^2 = D = N^{\frac{1}{2}} \log^{-B_1} N$（$B_1$ 由下面所利用的均值定理来确定），就有

$$S(\mathscr{L}; \mathscr{P}, D^{\frac{1}{2}}) \leqslant 8(1 + o(1)) c(N) \frac{X_1}{\log N} + R_3 + R_4, \quad (48)$$

其中

$$R_3=\sum_{\substack{d\le D\\(d,N)=1}}\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}\left|\sum_{\substack{c\in\mathscr{E}\\(c,d)=1}}\left(\sum_{\substack{p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{3}},\frac{N}{c}\right)\\cp_1\equiv N(d)}}1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\phi(d)}\sum_{p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{3}},\frac{N}{c}\right)}1\right)\right|.$$

$$R_4=\sum_{\substack{d\le D\\(d,N)=1}}\frac{\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}}{\phi(d)}\sum_{\substack{c\in\mathscr{E}\\(c,d)>1}}\left(\sum_{p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{3}},\frac{N}{c}\right)}1\right).$$

设

$$g(a)=\sum_{\substack{c=a\\c\in\mathscr{E}}}1,$$

则有

$$R_3=\sum_{\substack{d\le D\\(d,N)=1}}\mu^2(d)\,3^{\nu_1(d)}\left|\sum_{\substack{N^{\frac{2}{7}}<a<N^{\frac{6}{7}}\\(a,d)=1}}g(a)\left(\sum_{\substack{p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{3}},\frac{N}{a}\right)\\ap_1\equiv N(d)}}1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\phi(d)}\sum_{p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{3}},\frac{N}{a}\right)}1\right)\right|,$$

及

$$R_4=\sum_{\substack{d\le D\\(d,N)=1}}\frac{\mu^2(d)3^{\nu_1(d)}}{\phi(d)}\sum_{\substack{N^{\frac{2}{7}}<a<N^{\frac{6}{7}}\\(a,d)>1}}g(a)\sum_{p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{3}},\frac{N}{a}\right)}1.$$

不难看出

$$g(a)\le 1,$$

且当 a 有小于 $N^{\frac{1}{7}}$ 的素因子时，

$$g(a)=0.$$

首先我们来估计 R_4。我们有(为避免混淆把变数 d 改为 q)

$$R_4\le\sum_{q\le D}\frac{d^2(q)}{\phi(q)}\sum_{\substack{a<N^{\frac{6}{7}}\\(a,q)>N^{\frac{1}{7}}}}\frac{N}{a}.$$

类似于(25)式对 R_2 的估计，易得

$$R_4 \ll N^{\frac{6}{7}+\varepsilon}. \tag{49}$$

现来估计 R_3. 我们不难看出集合 $\mathscr{E}$ 中的任一元素 $e = np_2p_3$，这里 p_2, p_3 都是由 e 所准一确定的[1]. 因为若 $e \in \mathscr{E}$，其标准分解式为

$$e = q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_k^{\alpha_k},\ q_1 < q_2 < \cdots < q_k,\ \alpha_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k,$$

则由集合 $\mathscr{E}$ 的定义可知，必有

$$p_2 = q_1, \quad p_3 = q_2.$$

所以 p_3 是 e 的单值函数，设为 $p_3 = r_2(e)$. 显然有

$$N^{\frac{1}{7}} < r_2(e) < N^{\frac{1}{5}}, \quad er_2(e) < N.$$

这样我们就有

$$R_3 \leqslant R_5 + R_6 + R_7, \tag{50}$$

其中

$$R_5 = \sum_{\substack{d \leqslant D \\ (d,N)=1}} \mu^2(d) 3^{\nu_1(d)} \Bigg| \sum_{\substack{N^{\frac{2}{7}} < a \leqslant N^{\frac{4}{5}} \\ (a,d)=1}} g(a) \times \Bigg(\sum_{\substack{p_1 < N^{\frac{1}{5}} \\ ap_1 \equiv N(d)}} 1 - \frac{1}{\phi(d)} \sum_{p_1 < N^{\frac{1}{5}}} 1 \Bigg) \Bigg|,$$

$$R_6 = \sum_{\substack{d \leqslant D \\ (d,N)=1}} \mu^2(d) 3^{\nu_1(d)} \Bigg| \sum_{\substack{N^{\frac{4}{5}} < a < N^{\frac{6}{7}} \\ (a,d)=1}} g(a) \times \Bigg(\sum_{\substack{ap_1 < N \\ ap_1 \equiv N(d)}} 1 - \frac{1}{\phi(d)} \sum_{ap_1 < N} 1 \Bigg) \Bigg|,$$

$$R_7 = \sum_{\substack{d \leqslant D \\ (d,N)=1}} \mu^2(d) 3^{\nu_1(d)} \Bigg| \sum_{\substack{N^{\frac{2}{7}} < a \leqslant N^{\frac{6}{7}} \\ (a,d)=1}} g(a)$$

---

1) 由此也就证明了 $g(a) \leqslant 1$.

$$\times\left(\sum_{\substack{p_1\leqslant r_2(a)\\ ap_1\equiv N(d)}}1-\frac{1}{\phi(d)}\sum_{p_1\leqslant r_2(a)}1\right)\Bigg|.$$

选择适当的 B_1，由第八章 § 2 推论 3 及推论 4(并注意到定理 2 的附注 6，4，3)，即得

$$R_5\ll\frac{N}{\log^3N},\quad R_6\ll\frac{N}{\log^3N},\quad R_7\ll\frac{N}{\log^3N}.$$

由此及 (50)，(49)，(48)，(47)，(46) 式就证明了我们的引理.

引理 8 设 X 由引理 7 (44) 式所给出，我们有

$$X<\frac{4}{1.763}\left(3\log\frac{7}{5}-1\right)(1+o(1))\frac{N}{\log N}. \tag{51}$$

证 由于当 $N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{\frac{1}{5}}$ 时

$$\frac{\log\dfrac{N}{p_1p_2p_3}}{\log p_3}\geqslant 2,$$

从引理 4 得

$$X\leqslant\sum_{N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{\frac{1}{5}}}\left\{w\left(\frac{\log\dfrac{N}{p_1p_2p_3}}{\log p_3}\right)\frac{N}{p_1p_2p_3\log p_3}\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{N}{p_1p_2p_3\log^2p_3}\right)\right\}.$$

故由引理 3 及素数定理可得

$$X<\frac{N}{1.763}\sum_{N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{\frac{1}{5}}}\frac{1}{p_1p_2p_3\log p_3}+O\left(\frac{N}{\log^2N}\right)$$

$$=\frac{N}{1.763}\int_{N^{\frac{1}{7}}}^{N^{\frac{1}{5}}}\frac{du}{u\log u}\int_u^{N^{\frac{1}{5}}}\frac{dv}{v\log^2v}\int_v^{N^{\frac{1}{5}}}\frac{dt}{t\log t}$$

$$+O\left(\frac{N}{\log^2N}\right)=\frac{N}{1.763}\int_{N^{\frac{1}{7}}}^{N^{\frac{1}{5}}}\left\{\frac{1}{\log N}\left(5-\frac{\log N}{\log u}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\log N}{\log u}\log\frac{\log N}{5\log u}\right)\right\}\frac{du}{u\log u}+O\left(\frac{N}{\log^2N}\right)$$

$$= \frac{4}{1.763}\left(3\log\frac{7}{5}-1\right)\frac{N}{\log N}+O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right).$$

这就证明了 (51) 式，证毕.

定理 4 的证明 显然有

$$D(N) \leqslant S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{5}})+O(N^{\frac{1}{5}}). \tag{52}$$

在引理 5 中取 $u=5$, $v=7$, 由引理 5、引理 6、引理 7 及引理 8 得

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{5}})<8(1+o(1))c(N)\frac{N}{\log^2 N}(1-\Delta), \tag{53}$$

其中

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt$$
$$-\int_{2}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{2}{1.763}\left(3\log\frac{7}{5}-1\right).$$

下面来计算 Δ. 其中第一个积分[20],利用

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\geqslant 2x,\ 0\leqslant x<1,$$

可得

$$\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt$$
$$=\int_{1.5}^{2}\frac{\log\frac{11}{10}+\log\left[\frac{10}{11}\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{2(t+1)}\right)\right]}{t}dt$$
$$+\int_{2}^{2.5}\frac{\log\frac{4}{3}+\log\left[\frac{3}{4}\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{2(t+1)}\right)\right]}{t}dt$$
$$=\log\frac{11}{10}\log\frac{4}{3}+\Delta_1+\log\frac{4}{3}\log\frac{5}{4}+\Delta_2,$$

其中

$$\Delta_1 > 14\int_{1.5}^{2}\frac{2t-3}{t(36t+1)}\,dt = 14\left(\frac{55}{18}\log\frac{73}{55} - 3\log\frac{4}{3}\right),$$

$$\Delta_2 > 14\int_{2}^{2.5}\frac{t-2}{t(23t+2)}\,dt = 14\left(\frac{24}{23}\log\frac{119}{96} - \log\frac{5}{4}\right).$$

综合以上三式即得

$$\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log\left(2.5 - \frac{3.5}{t+1}\right)}{t}\,dt > 0.13405. \qquad (54)$$

再利用

$$\log x \leqslant \frac{1}{2}(x-1)\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad x \geqslant 1,$$

可得[1)]

$$\int_{2}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt < \frac{1}{2}\int_{2}^{2.5}\frac{t-2}{t-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) < 0.04728. \qquad (55)$$

由 (54), (55) 式及

$$\frac{2}{1.763}\cdot\left(3\log\frac{7}{5} - 1\right) < 0.01069,$$

即得

$$\Delta > 0.0090.$$

这就得到了 (30) 式. 证毕.

最后,我们要指出的是,在[20]中陈景润引进了函数 $H(s)$ 和 $G(s)$, 对于这二个函数如何得到最优的结果是一个没有解决的问题.

从本章所证明的二个定理可以认为, 进一步研究和应用加权筛法及第八章的新的一类均值定理, 可能对一些解析数论问题得到更好的新结果.

---

1) [20] 中作了更精确的计算得 $\int_{2}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt < 0.046614$.

第十章　零点分布（二）

本书的最后三章——第十、十一、十二章，将用来讨论有关 Goldbach 数的一些结果．为此，除了第四章零点分布（一）中所证明的一些定理外，我们还需要 L 函数的另外一些性质，特别是由 Линник[73] 在其关于算术数列中的最小素数这一著名工作中所首先证明的二个十分重要的结果．对这二个结果，许多数学工作者作了进一步的研究与改进，本章的主要目的就是利用 Turán 方法来证明经过改进和简化的 Линник 的这二个结果（见定理 1，2 及定理 3）．所用到的 Turán 关于估计方幂和下界的重要结果，这里将不予证明，可看他的工作 [124]，[125]，这一章的内容主要是为第十一章 § 2 作准备，而本章的引理 9 和 11 仅在第十一章 § 3 中用到．

除了引理 9 中的常数 $c(\varepsilon)$ 外，本章中的常数 $c_1, c_2, \cdots$，都是可计算的常数．

§ 1.　L 函数的若干引理

引理 1[1)]　设整数 $q \geqslant 1$，$\chi \bmod q$，则对任一实数 t_0，$L(s, \chi)$ 在区域 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1$ 中的非显明零点的个数

$$N_0 \leqslant c_1 \log q(|t_0| + 2). \tag{1}$$

证明见 [24]，[60]，[92]．

引理 2　设整数 $q \geqslant 1$，$\chi \bmod q$ 为原特征，$s = \sigma + it$，则当 $-2 \leqslant \sigma \leqslant 2$ 时有

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{E_0}{s-1} + \sum_{|\rho - s| \leqslant 1/2} \frac{1}{s-\rho}$$

1）为了方便起见，我们将第四章引理 1 复述于此．这里，$L(s, \chi)$ 在虚轴上的零点亦看作是非显明零点．

$$+O(\log q(|t|+2)),\qquad (2)$$

其中

$$E_0=\begin{cases}1, & q=1,\\ 0, & q>1,\end{cases}$$

ρ 为 $L(s,\chi)$ 的零点.

证明见 [24], [60], [92].

引理 3 设整数 $q\geqslant 1$, $\chi \bmod q$, $s=\sigma+it$, 则在半平面 $\sigma\leqslant -\frac{1}{4}$ 中挖去以 $L(s,\chi)$ 的显明零点为圆心,以 1/8 为半径的圆后的区域上有

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\leqslant c_2\log q|s|.$$

证明见 [24], [60], [92].

引理 4 设整数 $q\geqslant 3$, $\chi \bmod q$ 为实原特征,则有

$$L(1,\chi)\geqslant\frac{c_3}{\sqrt{q}\log^2 q}.$$

证明见 [60].

引理 5 没整数 $q\geqslant 3$, 则对所有实的非主特征 $\chi \bmod q$, 当

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_4}{\sqrt{q}\log^4 q}$$

时,

$$L(\sigma,\chi)\neq 0.$$

证明见 [60].

引理 6 设整数 $q\geqslant 1$, $s=\sigma+it$, 则所有的 $L(s,\chi)$, $\chi \bmod q$, 仅可能除去一个函数外,在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_5}{\log q(|t|+2)}\qquad (3)$$

内没有零点. 如果这样的例外函数存在,则对应的 $\tilde{\chi}$ 一定是模 q 的实的非主特征,且 $L(s,\tilde{\chi})$ 在上述区域中仅有一个一级实零点 $\tilde{\beta}$.

证明见 [24], [60], [92].

若令 $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$, 则由 (3) 式知

$$\tilde{\delta}\log 2q < c_5. \tag{4}$$

引理 7 设 $Q\geqslant 1$, $s=\sigma+it$, 则所有的 $L(s,\chi)$, $\chi \bmod q$ 为原特征, $q\leqslant Q$, 仅可能除去一个函数外,在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_6}{\log Q(|t|+2)} \tag{5}$$

内没有零点. 如果这样的例外函数存在,则对应的 $\tilde{\chi}$ 一定是某一个模 $\tilde{q}\leqslant Q$ 的实原特征, 且 $L(s,\tilde{\chi})$ 在上述区域中仅有一个一级实零点 $\tilde{\beta}$.

证明见 [24], [60], [92].

若令 $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$, 则由 (5) 式知

$$\tilde{\delta}\log 2Q < c_6. \tag{6}$$

引理 6, 引理 7 中的 $\tilde{\chi}$, $L(s,\tilde{\chi})$ 及 $\tilde{\beta}$, 我们皆称之为是对应情况下的例外特征,例外函数,及例外零点. 引理 7 中的 $\tilde{q}$ 我们称之为例外模.

由引理 5 及引理 7, 我们容易推得

引理 8 设 $\tilde{q}$ 是引理 7 中的例外模, $Q\geqslant 3$, 则有

$$\tilde{q}\geqslant c_7\frac{\log^2 Q}{(\log\log Q)^8}.$$

证 从引理 5, 引理 7 可得

$$\sqrt{\tilde{q}}\log^4\tilde{q} > \frac{c_4}{c_6}\log 2Q.$$

由此立即推出所要的结果,证毕.

引理 9 (Siegel) 设整数 $q\geqslant 1$, χ 是模 q 的实特征, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 一定存在一个常数 $c=c(\varepsilon)>0$, 使得 $L(s,\chi)$ 的实零点 β 满足

$$\beta\leqslant 1-\frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

证明见 [24], [60], [81], [92], 这里 $c(\varepsilon)$ 为不可计算的常数.

下面的引理通常称为 Линник 密度引理.

引理 10 设整数 $q \geqslant 1$, t_0 为任一实数, $s_0 = 1 + it_0$, 以及实数 r 满足

$$\frac{c_5}{\log q(|t_0| + 2)} \leqslant r \leqslant 4,$$

则任一 $L(s, \chi)$, $\chi \bmod q$ 在圆 $|s - s_0| \leqslant r$ 内的零点个数

$$M = M(r;\, t_0, \chi) \leqslant c_6 r \log q(|t_0| + 2). \tag{7}$$

证 先假定 χ 为模 q 的原特征及 $r \leqslant 1/4$. 在引理 2 中取 $s = s_r = 1 + r + it_0$, 我们有

$$\operatorname{Re} \sum_{|\rho - s_r| \leqslant 1/2} \frac{1}{s_r - \rho} = \operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s_r, \chi) + \operatorname{Re} \frac{E_0}{\delta_r - 1}$$
$$+ O(\log q(|t_0| + 2)).$$

显然,对 $L(s, \chi)$ 的所有零点 ρ 都有

$$\operatorname{Re}(s_r - \rho) \geqslant r,$$

而当零点 ρ 属于圆 $|s - s_0| \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{4}$ 时必有

$$|s_r - \rho| \leqslant 2r \leqslant \frac{1}{2}.$$

因此我们有

$$\operatorname{Re} \sum_{|\rho - s_r| \leqslant 1/2} \frac{1}{s_r - \rho} = \sum_{|\rho - s_r| \leqslant 1/2} \frac{\operatorname{Re}(s_r - \rho)}{|s_r - \rho|^2}$$
$$\geqslant \sum_{|\rho - s_0| \leqslant r} \frac{r}{|s_r - \rho|^2} \geqslant \frac{M}{4r}.$$

此外,我们还有

$$\frac{L'}{L}(s_r, \chi) \ll \frac{1}{r}, \quad \operatorname{Re} \frac{E_0}{s_r - 1} \leqslant \frac{1}{r}.$$

综合以上结果就得到

$$\frac{M}{r} \ll \frac{1}{r} + \log q(|t_0| + 2).$$

再利用条件 $r \geqslant \dfrac{c_5}{\log q(|t_0| + 2)}$, 由上式即得所要的结果. 当

$\frac{1}{4} \leqslant r \leqslant 4$ 时，由引理 1 知 (7) 式亦成立[1]. 这就对 χ 为原特征的情形证明了引理.

当 $\chi \bmod q$ 不是原特征时，设 $\chi \bmod q \Longleftrightarrow \chi^* \bmod q^*$，由于 $L(s, \chi)$ 和 $L(s, \chi^*)$ 在半平面 $\sigma > 0$ 内的零点是相同的；所以引理亦成立，证毕.

利用 Виноградов 的三角和方法，可以证明

引理 11 设整数 $q \geqslant 1$，$s = \sigma + it$，则所有的 $L(s, \chi)$，$\chi \bmod q$，在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_9}{\log q + (\log(|t| + 2))^{4/5}}$$

中，除去可能有的例外零点 $\tilde{\beta}$（见引理 6）外，没有零点.

证明见 [92].

§2. Turán 方法

证明本章二个定理的主要工具是下面属于 P. Turán[124,125] 的关于估计方幂和下界的一个重要结果.

引理 12 设 $z_1, z_2, \cdots z_J$ 是任意 J 个复数，满足

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \cdots \geqslant |z_J|,$$

则对任意的 $m > 0$ 及 $N \geqslant J$，一定存在某一个 k_0，

$$m \leqslant k_0 \leqslant m + N,$$

使得

$$\left|\sum_{j=1}^{J} z_j^{k_0}\right| \geqslant \left(\frac{N}{23(m+N)}\right)^{k_0} |z_1|^{k_0}.$$

引理 13 设整数 $k \geqslant 2$，A 为实数，$B > 0$，$y > 0$，以及 $a > 1$，再设

$$R_k(y; A, B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \left(e^{Aw}\frac{e^{Bw} - e^{-Bw}}{2Bw}\right)^k \frac{dw}{y^w}, \tag{8}$$

---

1) 这里可能有的显明零点只有有限多个. 引理事实上对 $r \leqslant r_0$ 都成立，r_0 为任一固定正数.

其中

$$\int_{(\lambda)} = \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}, \quad \lambda \text{ 为实数,}$$

则我们有

$$R_k(y; A, B) = \begin{cases} = 0, & 0 < y \leqslant e^{(A-B)k}, \\ \leqslant c_{10} B^{-1}, & e^{(A-B)k} < y < e^{(A+B)k}, \\ = 0, & y \geqslant e^{(A+B)k}, \end{cases} \tag{9}$$

以及当 $k \geqslant 3$ 时有

$$\frac{d}{dy} R_k(y; A, B) \leqslant \frac{c_{11}}{yB^2}. \tag{10}$$

证 我们有

$$R_k(y; A, B) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(2B)^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}$$
$$\times \int_{(a)} \left(\frac{e^{Ak+(k-2j)B}}{y} \right)^w \frac{dw}{w^k}.$$

熟知当 $k \geqslant 2$ 时有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{a^w}{w^k} dw = 0, \quad (0 \leqslant a \leqslant 1).$$

由以上二式即得

$$R_k(y; A, B) = 0, \quad y \geqslant e^{(A+B)k}. \tag{11}$$

另一方面,(8) 式右边的被积函数是 w 的整函数，且当 $k \geqslant 2$ 时，我们可以把 (8) 式右边的积分移至 $\mathrm{Re}\, w = -1$，这样就有

$$R_k(y; A, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} \left(e^{Aw} \frac{e^{Bw} - e^{-Bw}}{2Bw} \right)^k \frac{dw}{y^w}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(2B)^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}$$
$$\times \int_{(-1)} \left(\frac{e^{Ak+(k-2j)B}}{y} \right)^w \frac{dw}{w^k}.$$

熟知当 $k \geqslant 2$ 时有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} \frac{a^w}{w^k} dw = 0, \quad (a \geqslant 1).$$

由以上二式即得

$$R_k(y;A,B)=0,\quad y\leqslant e^{(A-B)k}. \tag{12}$$

我们可以把 (8) 式右边积分移至 $\mathrm{Re}\,w=0$，就有

$$R_k(y;A,B)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}\left(e^{Aw}\frac{e^{Bw}-e^{-Bw}}{2Bw}\right)^k\frac{dw}{y^w}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(Ak-\log y)t}\left(\frac{\sin Bt}{Bt}\right)^k dt.$$

由上式即得

$$|R_k(y;A,B)|\leqslant\frac{1}{2\pi B}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^k dt.$$

由此及 (11)，(12) 式我们就证明了 (9) 式.

现在来证明(10)式.不难验证，当 $k\geqslant 3$ 时 (8) 式可以在积分号下取微分，故有

$$\frac{d}{dy}R_k(y;A,B)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\left(e^{Aw}\frac{e^{Bw}-e^{-Bw}}{2Bw}\right)^k\frac{wdw}{y^{w+1}},$$

把上式积分移至 $\mathrm{Re}\,w=0$ (因 $k\geqslant 3$，所以是可以的)即得

$$\left|\frac{d}{dy}R_k(y;A,B)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi y}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin Bt}{Bt}\right|^k|t|\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi B^2y}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^k|t|\,dt,\quad k\geqslant 3.$$

这就证明了 (10) 式. 引理证毕.

引理 14 设整数 $q\geqslant 1$，$\chi \bmod q$，t_0 为任一实数，$s_0=1+it_0$，以及

$$f(w)=e^{2Aw}\frac{e^{Aw}-e^{-Aw}}{2Aw}.$$

那么，一定存在正常数 c_{12}，c_{13}，及 c_{14}，使对满足条件

$$\frac{c_5}{\log q(|t_0|+2)}\leqslant r\leqslant c_{12}$$

的任意整数 r，如果函数 $L(s,\chi)$ 在圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 上有一零点 ρ_0，则对任意满足条件

$$K\geqslant 3,\quad K\geqslant c_8c_{13}r\log q(|t_0|+2)$$

的整数 K，必有整数 k_0 满足

$$K \leqslant k_0 \leqslant 2K,$$

使得对于圆 $|s-s_0| \leqslant r$ 中的任一点 s 有

$$\left|\sum_\rho f^{k_0}(\rho - s)\right| > e^{-c_{14}K}, \tag{13}$$

这里取 $A = \frac{1}{r}$, $\sum\limits_\rho$ 表示对 $L(s, \chi)$ 的所有零点求和.

证 以 $\sum\limits_\rho{}^1$ 表对 $L(s, \chi)$ 的所有非显明零点求和，$\sum\limits_\rho{}^2$ 表对 $L(s, \chi)$ 的所有显明零点求和. 当 $c_{12} \leqslant 1/2$ 时，显然我们有

$$\left|\sum_\rho{}^2\right| \leqslant \sum_\rho{}^2 |f^{k_0}(\rho - s)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1}{r}(j-1/2)}}{\frac{1}{r}\left(j-\frac{1}{2}\right)}\right)^{k_0}$$

$$\leqslant (2re^{-\frac{1}{2r}})^{k_0}. \tag{14}$$

下面来估计 $\sum\limits_\rho{}^1$. 我们可以取 c_{12} 足够小，设 $H \geqslant 2$. $Hc_{12} < 1/2$，为一待定常数，并把 $\sum\limits_\rho{}^1$ 分为

$$\sum_\rho{}^1 f^{k_0}(\rho - s) = \sum_{|\rho-s_0|\leqslant Hr}{}^1 + \sum_{Hr<|\rho-s_0|\leqslant 3}{}^1 + \sum_{|\rho-s_0|>3}{}^1$$

$$= I_1 + I_2 + I_3. \tag{15}$$

首先估计 I_2, I_3. 对所有的零点 ρ 有

$$\mathrm{Re}\,(\rho - s) \leqslant r, \quad |s-s_0| \leqslant r \tag{16}$$

及

$$|\rho - s| \geqslant |\rho - s_0| - |s - s_0| \geqslant |\rho - s_0| - r,$$

$$|s - s_0| \leqslant r. \tag{17}$$

由以上二式及引理 10 知，当 $2^lHr \leqslant 2$ 时有

$$\sum_{2^lHr<|\rho-s_0|\leqslant 2^{l+1}Hr}{}^1 |f^{k_0}(\rho - s)| \leqslant \sum_{2^lHr<|\rho-s_0|\leqslant 2^{l+1}Hr}{}^1 \left(\frac{e^{3Ar}}{Ar(2^lH-1)}\right)^{k_0}$$

$$\leqslant \left(\frac{e^3}{(H-1)2^l}\right)^{k_0} c_8 2^{l+1}Hr\log q(|t_0|+2)$$

$$\leqslant \frac{4c_8}{(2^{k_0-1})^l} e^{3k_0-(k_0-1)\log(H-1)} r \log q(|t_0|+2).$$

由此易得

$$|I_2| \leqslant 8c_8 e^{3k_0-(k_0-1)\log(H-1)} r \log q(|t_0|+2). \tag{18}$$

当 $\rho=\beta+i\gamma$ 为非显明零点时，若 $|\rho-s_0|>3$，则必有 $|\gamma-t_0|>2$，由此及 (16)，(17) 式从引理 1 可以推出

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{2^l<|\gamma-t_0|\leqslant 2^{l+1}} |f^{k_0}(\rho-s)| \\
&\leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{re^3}{2^l-r}\right)^{k_0} 2^l c_1 \log q(|t_0|+2^{l+1}+2) \\
&\leqslant 10c_1 e^{3k_0-(k_0-1)\log\frac{1}{r}} r \log q(|t_0|+2).
\end{aligned} \tag{19}$$

下面我们从引理 12 来估计 I_1 的下界。由假设知，在圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 中有一零点 ρ_0，显然有

$$\mathrm{Re}\,(\rho_0-s)\geqslant -2r, \quad |s-s_0|\leqslant r,$$

所以

$$|f(\rho_0-s)|\geqslant e^{-4}\left|\frac{sh A(\rho_0-s)}{A(\rho_0-s)}\right|, \quad |s-s_0|\leqslant r.$$

由于当 $|s-s_0|\leqslant r$ 时，$|A(\rho_0-s)|\leqslant 2$，而函数 $\frac{shw}{w}$ 在 $|w|\leqslant 2$ 上无零点，故其模有正的下界

$$\left|\frac{shw}{w}\right|\geqslant c_{15}>0, \quad |w|\leqslant 2.$$

因而我们有

$$|f(\rho_0-s)|\geqslant c_{15}e^{-4}, \quad |s-s_0|\leqslant r.$$

现在引理 12 中取复数 $z_1, z_2, \cdots z_J$ 为 $f(\rho-s)$，其中 ρ 为 $L(s,\chi)$ 在 $|s-s_0|\leqslant Hr$ 中的零点。由引理 10 知

$$J\leqslant c_8 Hr\log q(|t_0|+2)$$

设整数 K 满足

$$K\geqslant 3, \quad K\geqslant c_8 Hr\log q(|t_0|+2), \tag{20}$$

并在引理 12 中取 $m=N=K$，故由引理 12 知必有一 k_0 满足

$$K \leqslant k_0 \leqslant 2K, \tag{21}$$

使得

$$|I_1| \geqslant \left(\frac{1}{46}\right)^{k_0}(c_{15}e^{-4})^{k_0} \geqslant e^{-c_{16}k_0}. \tag{22}$$

从 (18)，(20) 式看出，若取 c_{13} 充分大，使满足

$$c_8 c_{13} \geqslant 1.$$

这样，我们取待定常数 $H=c_{13}$ 时就有

$$K \geqslant r\log q(|t_0|+2)$$

及

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{4}e^{-c_{16}k_0}. \tag{23}$$

对取定的 c_{13}，我们可取 c_{12} 充分小，使其满足 $Hc_{12}=c_{13}c_{12}<1/2$，并且使从 (19) 式及 $r \leqslant c_{12}$ 可推得

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{4}e^{-c_{16}k_0}. \tag{24}$$

再由 (14) 式知当 c_{12} 充分小，$r \leqslant c_{12}$ 时，同样可有

$$\left|\sum_{\rho}{}^{2}\right| \leqslant \frac{1}{4}e^{-c_{16}k_0}. \tag{25}$$

综合 (22)，(23)，(24)，(15)，(25) 及 (21) 各式，并选取适当的常数 c_{14}，即得 (13) 式，证毕。

附注 1 由引理 14 的证明可知，当(13)式中的求和号 $\sum_{\rho}$ 表示对 $L(s,\chi)$ 的所有非显明零点及任意指定多个显明零点求和时，引理 14 亦成立。

附注 2 证明引理 14 时仅用到了函数 $L(s,\chi)$ 具有引理 1，及引理 10 所证明的性质，以及估计式 (14)。因此对于任一函数 $H(s)$，只要它使引理 1，引理 10 及估计式 (14) 成立，则对它引理 14 亦成立。

§3. L 函数非零区域的扩展

引理 15 设 $q \geqslant 3$，$\chi \bmod q$ 为任一非主特征，

$$\zeta(s)L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s},\quad \sigma>1,$$

则当 $x\geqslant 2$ 时有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=(\log x+\gamma)L(1,\chi)+L'(1,\chi)$$

$$+O\left(\sqrt{\frac{q}{x}}\log q\log x\right),\tag{26}$$

这里 γ 为 Euler 常数.

证 由于

$$a_n=\sum_{d|n}\chi(d),$$

及

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O(x^{-1}),$$

所以有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\chi(d)=\sum_{d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d}\sum_{m\leqslant\frac{x}{d}}\frac{1}{m}$$

$$=\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}\sum_{m\leqslant\frac{x}{d}}\frac{1}{m}+\sum_{\sqrt{x}<d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d}\sum_{m\leqslant\frac{x}{d}}\frac{1}{m}$$

$$=\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}\left(\log\frac{x}{d}+\gamma+O\left(\frac{d}{x}\right)\right)$$

$$+\sum_{\sqrt{x}<d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d}\sum_{m\leqslant\frac{x}{d}}\frac{1}{m}$$

$$=(\log x+\gamma)\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}-\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)\log d}{d}$$

$$+\sum_{m<\sqrt{x}}\frac{1}{m}\sum_{\sqrt{x}<d\leqslant\frac{x}{m}}\frac{\chi(d)}{d}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

利用第二章定理 1，我们有

$$L(1,\chi)=\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}+\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}$$

$$= \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} + O\left(\sqrt{\frac{q}{x}} \log q\right),$$

$$L'(1, \chi) = -\sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{\chi(d) \log d}{d} - \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{\chi(d) \log d}{d}$$

$$= \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{\chi(d) \log d}{d} + O\left(\sqrt{\frac{q}{x}} \log q \log x\right).$$

以及

$$\sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{m} \sum_{\sqrt{x} < d \leqslant \frac{x}{m}} \frac{\chi(d)}{d} \ll \sqrt{\frac{q}{x}} \log q \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{m}$$

$$\ll \sqrt{\frac{q}{x}} \log q \log x.$$

综合以上结果即得 (26) 式，证毕.

引理 16 设整数 $q \geqslant 3$, $\tilde{\chi}$ 及 $\tilde{\beta}$ 是相应于引理 6 中的例外特征及例外零点，则对于任给的正数 b，一定有一个正常数 c_{17}（依赖于 b）使

$$S = \sum_{n \leqslant (qU)^2} \frac{a_n}{n} \geqslant c_{17} \tilde{\delta}^{-1} L(1, \tilde{\chi}), \tag{27}$$

其中 $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$,

$$a_n = \sum_{d \mid n} \tilde{\chi}(d),$$

以及 U 为满足条件

$$U \geqslant 2, \quad \tilde{\delta} \log qU \leqslant b \tag{28}$$

的正数.

证 在第三章引理 5 中取 $f(s) = \zeta(s) L(s, \tilde{\chi})$, $x = (qU)^{3/2}$, $s = \tilde{\beta}$, $c = 2 - \tilde{\beta}$, 我们就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\tilde{\beta}} e^{-n/x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2-\tilde{\beta})} \Gamma(w) \zeta(\tilde{\beta} + w) L(\tilde{\beta} + w, \tilde{\chi}) x^w \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \Gamma(z - \tilde{\beta}) \zeta(z) L(z, \tilde{\chi}) x^{z - \tilde{\beta}} \, dz.$$

由第三章的引理 4, 7, 8 及留数定理知，上式最后一个积分的积分

路线可从 (2) 移至 $(-\frac{1}{2})$，并有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\tilde{\beta}} e^{-n/x} = \Gamma(\tilde{\delta}) L(1, \tilde{\chi}) x^{\tilde{\delta}} + O((qU)^{-1}).$$

由于 $\tilde{\chi}$ 是实特征，所以

$$0 \leqslant a_n \leqslant n,$$

故有

$$\sum_{n>(qU)^2} a_n n^{-\tilde{\beta}} e^{-n/x} \leqslant \sum_{n>(qU)^2} n e^{-n/x} \ll (qU)^{-1}.$$

利用条件 (28) 有

$$\sum_{n\leqslant(qU)^2} a_n n^{-\tilde{\beta}} e^{-n/x} \leqslant \sum_{n\leqslant(qU)^2} \frac{a_n}{n} n^{\tilde{\delta}} \leqslant (qU)^{2\tilde{\delta}} S \leqslant e^{2b} S.$$

由以上三式并利用 $\Gamma(1+\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}\Gamma(\tilde{\delta})$ 可得

$$\begin{aligned} e^{2b} S &\geqslant \Gamma(1+\tilde{\delta}) x^{\tilde{\delta}} \tilde{\delta}^{-1} L(1, \tilde{\chi}) + O((qU)^{-1}) \\ &\geqslant \frac{1}{2} \tilde{\delta}^{-1} L(1, \tilde{\chi}) + O((qU)^{-1}). \end{aligned}$$

设 $\tilde{\chi} \bmod q \Longleftrightarrow \tilde{\chi}^* \bmod q^*$，因 $\tilde{\chi}$ 是实的非主特征，所以 $\tilde{\chi}^*$ 是实原特征，且 $q^* \geqslant 3$，由引理 4 知

$$\begin{aligned} L(1, \tilde{\chi}) &\geqslant L(1, \tilde{\chi}^*) \prod_{\substack{p|q \\ p\nmid q^*}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &\gg \frac{1}{\sqrt{q}\log^3 q} > \frac{1}{\sqrt{qU}\log^3 qU}. \end{aligned} \tag{29}$$

利用条件 (28) 式，从以上二式可知必存在一正常数 c_{17} 使 (27) 式成立，证毕.

现在，我们来证明本节的主要结果.

定理 1 若引理 6 中的例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在，则函数 $\prod_{\chi_q} L(s, \chi)$

在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{18}}{\log q(|t|+2)} \log \frac{c_{19} e}{\tilde{\delta} \log q(|t|+2)},$$
$$\tilde{\delta} \log q(|t|+2) \leqslant c_{19}, \tag{30}$$

中除去 $\tilde{\beta}$ 外没有其它零点，其中 $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$.

把区域 (30) 式和区域 (3) 相比较，可以看出，当例外零点存在时，若不计例外零点，我们可以把 L 函数的非零区域加以扩展. 这一重要现象是由 Линник 所发现的，并称之谓 Deuring-Heilbronn Phenomenon. 同样相应于引理 7 的情形，我们有

定理 2 若引理 7 中的例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在，则函数 $\prod_{q\leqslant Q}\prod_{\chi_q}^{*}$ $\cdot L(s,\chi)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1-\frac{c_{20}}{\log Q(|t|+2)}\log\frac{c_{21}e}{\tilde{\delta}\log Q(|t|+2)},$$
$$\tilde{\delta}\log Q(|t|+2)\leqslant c_{21} \tag{31}$$

中除去 $\tilde{\beta}$ 外没有其它零点，其中 $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$.

定理 2 很容易从定理 1 推出，我们先来证明这一点. 显然，引理 6，引理 7 中的常数 c_5，c_6 缩小后，引理均仍成立，所以可假定

$$c_6\leqslant\frac{1}{2}c_5.$$

若引理 7 中的例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在，以及 $\tilde{q}\leqslant Q$，$\tilde{\chi}\bmod\tilde{q}$ 是相应的例外模及例外特征. 任取 $q\leqslant Q$，χ_q 为任一模 q 的特征，我们来考虑对应于模 $\tilde{q}q$ 的所有函数 $L(s,\chi)$，$\chi\bmod q\tilde{q}$. 由于

$$\tilde{\beta}\geqslant 1-\frac{c_6}{\log Q(|t|+2)}\geqslant 1-\frac{c_5}{\log\tilde{q}q(|t|+2)}$$

及 $\tilde{\beta}$ 亦是 $L(s,\tilde{\chi}_{\tilde{q}}\chi^0_{\tilde{q}q})$ 的零点，其中 $\chi^0_{\tilde{q}q}$ 是模 $\tilde{q}q$ 的主特征. 而 $\tilde{\chi}_{\tilde{q}}\chi^0_{\tilde{q}q}$ 是模 $\tilde{q}q$ 的特征. 所以由引理 6 知 $\tilde{\beta}$ 亦是相应于模 $\tilde{q}q$ 的例外零点，故由定理 1 知所有函数 $L(s,\chi_q\chi^0_{\tilde{q}q})$ 在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_{18}}{\log\tilde{q}q(|t|+2)}\log\frac{c_{19}e}{\tilde{\delta}\log\tilde{q}q(|t|+2)},$$
$$\tilde{\delta}\log\tilde{q}q(|t|+2)\leqslant c_{19}$$

中除 $\tilde{\beta}$ 外没有其它零点. 由于

$$L(S,\chi_q\chi^0_{\tilde{q}q})=L(s,\chi_q)\prod_{\substack{p\nmid q\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1-\frac{\chi_q(p)}{p^s}\right),$$

所以，所有的函数 $L(s,\chi)$，$\chi\bmod q$ 在上述区域内除 $\tilde{\beta}$ 外没有其

它零点，当然，它们在更小的区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{18}}{\log Q^2(|t|+2)^2} \log \frac{c_{19}e}{\tilde{\delta} \log Q^2(|t|+2)^2},$$
$$\tilde{\delta} \log Q^2(|t|+2)^2 \leqslant c_{19}$$

内除 $\tilde{\beta}$ 外亦无其它零点。由于这里的 $q \leqslant Q$ 是任取的，所以，我们只要在区域 (31) 中取

$$c_{20} = \frac{1}{2} c_{18}, \quad c_{21} = \frac{1}{2} c_{19},$$

定理 2 就成立.

定理 1 的证明 设引理 6 中的例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在，$\tilde{\chi}$ 为例外特征。我们讨论函数

$$F(s, \chi) = L(s, \chi) L(s + \tilde{\delta}, \chi\tilde{\chi}), \quad \chi \neq \chi^0,$$

其中 $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$。不难证明 $F(s, \chi)$，$\chi \neq \chi^0$ 是整函数。且 $\tilde{\beta}$ 不是 $\prod\limits_{\chi \neq \chi^0} F(s, \chi)$ 的零点。此外，显然可知，$\prod\limits_{\chi \neq \chi^0} L(s, \chi)$ 除 $\tilde{\beta}$ 外的全部零点都是 $\prod\limits_{\chi \neq \chi^0} F(s, \chi)$ 的零点，同时若 ρ 是 $L(s, \chi^0)$ 的零点，则 $\rho - \tilde{\delta}$ 是 $F(s, \tilde{\chi})$ 的零点，所以在函数 $\prod\limits_{\chi \neq \chi^0} F(s, \chi)$ 的非零区域往右平移 $\tilde{\delta}$ 后所成的区域中函数 $\prod\limits_{\chi} L(s, \chi)$ 除 $\tilde{\beta}$ 外没有其它零点。这样，如果我们能证明函数 $\prod\limits_{\chi \neq \chi^0} F(s, \chi)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{22}}{\log q(|t|+2)} \log \frac{c_{23}e}{\tilde{\delta} \log q(|t|+2)},$$
$$\tilde{\delta} \log q(|t|+2) \leqslant c_{23}, \qquad (32)$$

中没有零点，则函数 $\prod\limits_{\chi} L(s, \chi)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{22}}{\log q(|t|+2)} \log \frac{c_{23}e}{\tilde{\delta} \log q(|t|+2)} + \tilde{\delta},$$
$$\tilde{\delta} \log q(|t|+2) \leqslant c_{23}$$

中除 $\tilde{\beta}$ 外亦没有零点。显然，由 (32) 式所确定的区域当缩小 c_{23}

后，区域变小．当然，在缩小后的区域中 $\prod_{\chi \neq \chi^0} F(s, \chi)$ 仍然没有零点，因而我们可以假定

$$c_{22} \geqslant 2c_{23},$$

这样一来，函数 $\prod_{\chi} L(s, \chi)$ 就在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{23}}{\log q(|t| + 2)} \log \frac{c_{23}e}{\tilde{\delta} \log q(|t| + 2)},$$
$$\tilde{\delta} \log q(|t| + 2) \leqslant c_{23}$$

中除 $\tilde{\beta}$ 外没有其它零点．所以只要取

$$c_{18} = c_{19} = c_{23}$$

定理 1 就成立．

根据以上的讨论，**定理 1 的证明就归结为要证明函数 $\prod_{\chi \neq \chi^0}$ $\cdot F(s, \chi)$ 在区域 (32) 中没有零点．** 而这等价于要证明下面的事实：设 b 为任一正数，若 $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ 是 $F(s, \chi)$，$\chi \neq \chi^0$，的零点，并满足 $\tilde{\delta} \log qU_0 \leqslant b$，则一定有

$$\tilde{\delta} \log qU_0 > c_{24}e^{-c_{25}\lambda_0} \tag{33}$$

成立，其中

$$\delta_0 = 1 - \beta_0, \quad U_0 = |\gamma_0| + 2, \quad \lambda_0 = \delta_0 \log qU_0. \tag{34}$$

我们不难看出，若 (33) 式成立，则取

$$c_{22} = \frac{1}{c_{25}} \quad c_{23} = \min\left(b, \frac{c_{24}}{e}\right),$$

就可使 $\prod_{\chi \neq \chi^0} F(s, \chi)$ 在区域 (32) 式中没有零点．这样，**定理 1 就变为要证明 (33) 式成立．**

(33) 式的证明 由以上对函数 $F(s, \chi)$ 和 $L(s, \chi)$ 之间零点关系的讨论知，引理 1，引理 2 及估计 (14) 式对 $F(s, \chi)$ 亦成立，故由引理 14 附注 2 知，对于函数 $F(s, \chi)$ 引理 14 亦成立．

设 ε 为给定的任意小的正数，满足

$$0 < \varepsilon \leqslant c_{12}. \tag{35}$$

设 $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ 是 $F(s,\chi)$，$\chi\neq\chi^0$，的零点，显然，我们可以假定

$$\delta_0=1-\beta_0\leqslant\varepsilon, \tag{36}$$

同时我们不难证明 $F(s,\chi),\chi\neq\chi^0$，在区域 (3) 中亦没有零点。现在我们对 $F(s,\chi)$，$\chi\neq\chi^0$，来应用引理 14。取

$$t_0=\gamma_0,\quad r=\delta_0,\quad A=\frac{1}{r}. \tag{37}$$

我们有

$$\frac{c_5}{\log qU_0}\leqslant r\leqslant\varepsilon\leqslant c_{12}. \tag{38}$$

再在引理 14 中取 $s=\rho_0$，则对任意满足条件

$$K\geqslant 3,\quad K\geqslant c_8c_{13}r\log qU_0=c_8c_{13}\lambda_0 \tag{39}$$

的整数 K，必有整数 k_0，

$$K\leqslant k_0\leqslant 2K \tag{40}$$

使得

$$\left|\sum_\rho f^{k_0}(\rho-\rho_0)\right|\geqslant e^{-c_{14}K}, \tag{41}$$

其中 $\sum\limits_\rho$ 为对 $F(s,\chi)$ 的所有非显明零点及任意多个显明零点求和(见引理 14 附注 2 及 1)。这里 c_8，c_{13} 还满足条件(见引理 14)

$$c_8c_{13}\geqslant 1. \tag{42}$$

同时，我们考虑积分

$$J_{k_0}(\rho_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}f^{k_0}(w)\frac{F'}{F}(\rho_0+w,\chi)dw,\quad \chi\neq\chi^0. \tag{43}$$

由于 $k_0\geqslant 3$ 以及

$$\frac{F'}{F}(w,\chi)=\frac{L'}{L}(w,\chi)+\frac{L'}{L}(w+\bar\delta,\chi\tilde\chi)$$

$$=-\sum_{n=1}^\infty\frac{b_n}{n^w},\quad \operatorname{Re}w>1, \tag{44}$$

这里

$$b_n=\begin{cases}\chi(p^m)(1+\tilde\chi(p^m)p^{-m\bar\delta})\log p, & n=p^m,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

故 (43) 式右边可以逐项积分，并利用引理 13 得到

$$|J_{k_0}(\rho_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\rho_0}} R_{k_0}(n;\ 2A,\ A)\right|$$

$$\leqslant \frac{c_{10}}{A} \sum_{e^{Ak_0} \leqslant p^m \leqslant e^{3Ak_0}} \frac{(1 + \tilde{\chi}(p^m) p^{-m\tilde{\delta}})}{p^{m\beta_0}} \log p$$

$$\leqslant \frac{c_{10}}{A}(3Ak_0)(e^{3Ak_0\delta_0}) \sum_{e^{Ak_0} \leqslant p^m \leqslant e^{3Ak_0}} \frac{1 + \tilde{\chi}(p^m) p^{-m\tilde{\delta}}}{p^m}$$

$$\leqslant 3c_{10}e^{4k_0} \sum_{e^{Ak_0} \leqslant p^m \leqslant e^{3Ak_0}} \frac{1 + \tilde{\chi}(p^m) p^{-m\tilde{\delta}}}{p^m},$$

由于

$$\sum_{\substack{e^{Ak_0} \leqslant p^m \leqslant e^{3Ak_0} \\ m \geqslant 2}} \frac{1 + \tilde{\chi}(p^m) p^{-m\tilde{\delta}}}{p^m} \leqslant 2 \sum_{2 \leqslant m \leqslant 6Ak_0} \sum_{e^{Ak_0} \leqslant p^m \leqslant e^{3Ak_0}} \frac{1}{p^m}$$

$$\leqslant 2 \sum_{2 \leqslant m \leqslant 6Ak_0} e^{-\frac{m-1}{m}Ak_0} \sum_{e^{\frac{Ak_0}{m}} \leqslant p \leqslant e^{\frac{3Ak_0}{m}}} \frac{1}{p} \leqslant c_{25}e^{-\frac{1}{4}Ak_0},$$

故有

$$|J_{k_0}(\rho_0)| \leqslant 3c_{10}e^{4k_0} \sum_{e^{Ak_0} \leqslant p \leqslant e^{3Ak_0}} \frac{1 + \tilde{\chi}(p) p^{-\tilde{\delta}}}{p} + c_{25}e^{-\frac{1}{4}Ak_0}. \quad (45)$$

但另一方面，我们可以把 (43) 式右边积分的线路 (2) 移到 $\left(-\frac{1}{2} - \beta_0\right)$，这就得到

$$J_{k_0}(\rho_0) = \sum_{\rho} f^{k_0}(\rho - \rho_0)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(-\frac{1}{2}-\beta_0\right)} f^{k_0}(w) \frac{F'}{F}(\rho_0 + w, \chi) dw, \quad \chi \neq \chi^0, (46)$$

其中 $\sum_{\rho}$ 表示对 $F(w, \chi)$ 在 $-\frac{1}{2} - \beta_0 \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 2$ 中的所有零点求和. 由引理 3 可得

$$\left|\frac{F'}{F}\left(\rho_0 + \left(-\frac{1}{2} - \beta_0 + iv\right), \chi\right)\right|$$

$$= \left|\frac{F'}{F}\left(-\frac{1}{2}+i(\gamma_0+v),\chi\right)\right|$$
$$\leqslant 2c_2(\log qU_0+\log q(|v|+2)).$$

由此推出

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\frac{1}{2}-\beta_0)} f^{k_0}(w)\frac{F'}{F}(\rho_0+w,\chi)dw\right|$$
$$\leqslant c_{26}\frac{e^{-Ak_0}}{A^{k_0}}\log qU_0\leqslant c_{27}\left(\frac{1}{A}\right)^{k_0-1}e^{-(A-1)k_0}, \qquad (47)$$

最后一步用到了条件

$$k_0\geqslant K\geqslant \delta_0\log qU_0, \quad A=\frac{1}{\delta_0}.$$

我们只要取 ϵ 适当小，这时 $A=\frac{1}{\delta_0}\geqslant\frac{1}{\epsilon}$ 就足够大，从 (45)，(46)，(47) 式及 (41) 式就可得到

$$\sum_{e^{Ak_0}\leqslant p\leqslant e^{3Ak_0}}\frac{1+\tilde{\chi}(p)p^{-\tilde{\delta}}}{p}\geqslant e^{-c_{28}K}. \qquad (48)$$

设 $L\geqslant 4c_{13}$，并使 $c_8L\lambda_0$ 为大于 3 的整数．现取 (39) 式中的 K 为

$$K=c_8L\lambda_0,$$

这样，

$$AK=c_8L\log qU_0.$$

因 $K\leqslant k_0\leqslant 2K$，故由 (48) 式得到

$$\sum_{(qU_0)^{c_8L}\leqslant p\leqslant (qU_0)^{6c_8L}}\frac{1+\tilde{\chi}(p)p^{-\tilde{\delta}}}{p}\geqslant e^{-c_{28}c_8L\lambda_0}. \qquad (49)$$

设 c_{29} 为一适当大的正数，下面分二种情形来讨论．

(1) 若存在某一个素数 p

$$(qU_0)^{c_8L}\leqslant p\leqslant (qU_0)^{6c_8L}$$

便有

$$1-p^{-\tilde{\delta}}>e^{-c_{29}\lambda_0}$$

成立，则可推出

$$e^{-c_{29}\lambda_0}<1-(qU_0)^{-6c_8L\tilde{\delta}}\leqslant 6c_8L\tilde{\delta}\log qU_0. \qquad (50)$$

这就证明了 (33) 式。

(2) 若上面的情形不成立，则对所有的

$$(qU_0)^{c_8L} \leqslant p \leqslant (qU_0)^{6c_8L}$$

有

$$1 - p^{-\tilde{\delta}} \leqslant e^{-c_{29}\lambda_0},$$

这时我们有

$$\sum_{\substack{(qU_0)^{c_8L} \leqslant p \leqslant (qU_0)^{6c_8L} \\ \tilde{\chi}(p)=-1}} \frac{1+\tilde{\chi}(p)p^{-\tilde{\delta}}}{p}$$

$$\leqslant e^{-c_{29}\lambda_0} \sum_{(qU_0)^{c_8L} \leqslant p \leqslant (qU_0)^{6c_8L}} \frac{1}{p} \leqslant c_{30}e^{-c_{29}\lambda_0}.$$

因为这里 c_{29} 可取得足够大，所以由上式及 (49) 式即得

$$\sum_{\substack{(qU_0)^{c_8L} \leqslant p \leqslant (qU_0)^{6c_8L} \\ \tilde{\chi}(p)=1}} \frac{1}{p} \geqslant e^{-2c_{28}c_8L\lambda_0}. \tag{51}$$

在引理 16 中取 $U = U_0$，当 $\tilde{\delta}\log qU_0 \leqslant b$ 时，由 (27) 式得

$$S = \sum_{n \leqslant (qU_0)^2} \frac{a_n}{n} \geqslant c_{17}\tilde{\delta}^{-1}L(1, \tilde{\chi}), \tag{52}$$

这里

$$a_n = \sum_{d|n} \tilde{\chi}(d) \geqslant 0, \quad a_p = \begin{cases} 2, & \tilde{\chi}(p) = 1, \\ 0, & \tilde{\chi}(p) = -1. \end{cases} \tag{53}$$

在 (51) 两边同乘以 S，并注意到 (53) 式，我们有

$$e^{-2c_{28}c_8L\lambda_0}S \leqslant \Bigg(\sum_{n \leqslant (qU_0)^2} \frac{a_n}{n}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{(qU_0)^{c_8L} \leqslant p \leqslant (qU_0)^{6c_8L} \\ \tilde{\chi}(p)=1}} \frac{1}{p}\Bigg)$$

$$\leqslant \Bigg(\sum_{n \leqslant (qU_0)^2} \frac{a_n}{n}\Bigg)\Bigg(\sum_{(qU_0)^{c_8L} \leqslant p \leqslant (qU_0)^{6c_8L}} \frac{a_p}{p}\Bigg)$$

$$\leqslant \sum_{(qU_0)^{c_8L} < n \leqslant (qU_0)^{6c_8L+2}} \frac{a_n}{n}, \tag{54}$$

上式最后一步是用到了 $c_8L \geqslant 4c_8c_{13} \geqslant 4$。再由引理 15 及 $c_8L \geqslant 4$ 可得

$$\sum_{(qU_0)^{c_8 L} \leqslant n \leqslant (qU_0)^{6c_8 L+2}} \frac{a_n}{n} = (5C_8 L + 2)(\log qU_0) L(1, \tilde{\chi}) + O\left(\frac{1}{qU_0}\right).$$

由此及 (52)，(54) 式可推得

$$C_{17}\tilde{\delta}^{-1} L(1, \tilde{\chi}) e^{-2c_{28}c_8 L\lambda_0} \leqslant (5C_8 L + 2)(\log qU_0) L(1, \tilde{\chi}) + O\left(\frac{1}{qU_0}\right).$$

利用 (29) 式 ($U = U_0$) 可知，对充分大的 q，我们有

$$2(5C_8 L + 2) L(1, \tilde{\chi}) \log qU_0 \geqslant C_{17}\tilde{\delta}^{-1} L(1, \tilde{\chi}) e^{-2c_{28}c_8 L\lambda_0},$$

即

$$\tilde{\delta} \log qU_0 \geqslant \frac{C_{17}}{2(5C_8 L + 2)} e^{-2c_{28}c_8 L\lambda_0}.$$

这也就得到了 (33) 式．对于有界的 q，我们可选取引理 6 中的常数 C_5 适当小，而使其不可能有例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在．

至此定理 1 全部证毕．

§4. L 函数在直线 $\sigma = 1$ 附近的零点密度估计

在第四章中，我们得到了下面两种形式的 L 函数零点密度估计

$$N(\alpha, T, q) \ll (qT)^{A_1(\alpha)(1-\alpha)} \log^{B_1} qT, \tag{55}$$

$$\sum_{q \leqslant Q} N^*(\alpha, T, q) \ll (Q^2 T)^{A_2(\alpha)(1-\alpha)} \log^{B_2} qT. \tag{56}$$

在那里我们要求的是得到尽可能小的 $A_1(\alpha)$ 及 $A_2(\alpha)$，而对数的方次 B_1，B_2 是不重要的．大家知道，L 函数在直线 $\sigma = 1$ 附近的零点是很稀少的，但从 (55)，(56) 式我们对 α 接近于 1 的情形，却只能得到很坏的估计，因为它总是会有一个很大的对数方次．Линник 首先在某些条件下证明了下述形式的估计

$$N(\alpha, T, q) \leqslant C_{31}(qT)^{c_{32}(1-\alpha)}, \tag{57}$$

这里常数 C_{32} 比 $A_1(\alpha)$要取较大的值，而这种损失所换来的好处是去掉了对数因子 $\log^{B_1}qT$. 显然，这种形式的估计，当 α 比 1 小得多时，没有估计 (55) 式好. 但当 α 十分接近于 1 时，由 (57) 式所得到的估计就比 (55) 式要好. 而这一点在某些数论问题中是有用的. 许多数学工作者对形如 (57) 的估计作了进一步研究. Gallagher[35] 首先讨论了相应于 (56) 式的这种类型的估计

$$\sum_{q\leqslant Q} N^*(\alpha, T, q) \leqslant C_{33}(Q^2T)^{c_{34}(1-\alpha)}. \tag{58}$$

最近，M. Jutila[59] 不用 Turán 方法给出了估计 (58) 式的一个新证明，并且能定出很好的常数 C_{33}, C_{34}. 本节的目的是利用 Turán 方法来证明下面的定理：

定理 3 对 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$, $T\geqslant 2$, 我们有

$$\sum_{q\leqslant T} N^*(\alpha, T, q) \leqslant C_{35}T^{c_{36}(1-\alpha)}. \tag{59}$$

为了证明定理 3，先来证明一个引理.

引理 17 设整数 $q\geqslant 1$, $\chi \bmod q$, 以及

$$S(y)=S(y; x, t, \chi)=\sum_{x<p\leqslant y}\frac{\chi(p)\log p}{p^{1+it}}, \quad x\leqslant y, \tag{60}$$

则在引理14的符号和条件下(当 $\chi=\chi^0$ 时取 $|t_0|\geqslant 2$), 我们有

$$\int_x^{x^6}\frac{|S(y; x, t_0, \chi)|^2}{y}dy \geqslant x^{-c_{37}r}\log^3 x, \tag{61}$$

其中 $x=e^{AK}$.

证 我们以 $S(y)$ 表示 $S(y; x; t_0, \chi)$. 对引理 14 中的 k_0, 我们来考虑积分

$$I_{k_0}(s_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} f^{(k_0)}(w)\frac{L'}{L}(w+s_0, \chi)dw, \tag{62}$$

由于 $k_0\geqslant 3$, 上式可以逐项积分，并利用 (9) 式得到

$$I_{k_0}(s_0)=-\sum_{e^{Ak_0}<n\leqslant e^{3Ak_0}}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{s_0}}R_{k_0}(n; 2A, A)$$

$$= -\sum_{e^{Ak_0}<p\leqslant e^{3Ak_0}} \frac{\chi(p)\log p}{p^{s_0}} R_{k_0}(p;\ 2A,\ A) + O\left(e^{-\frac{Ak_0}{4}}\right)$$

$$= -\sum_{x<p\leqslant x^6} \frac{\chi(p)\log p}{p^{s_0}} R_{k_0}(p;\ 2A,\ A) + O\left(e^{-\frac{Ak_0}{4}}\right)$$

$$= -\int_x^{x^6} R_{k_0}(y;\ 2A,\ A)dS(y) + O\left(e^{-\frac{Ak_0}{4}}\right)$$

$$= \int_x^{x^6} S(y)\frac{d}{dy}R_{k_0}(y;\ 2A,\ A)dy + O\left(e^{-\frac{Ak_0}{4}}\right).$$

由此及 (10) 式即得

$$|I_{k_0}(s)| \leqslant \frac{C_{11}}{A^2}\int_x^{x^6}\frac{|s(y)|}{y}dy + O(e^{-\frac{Ak_0}{4}}). \tag{63}$$

另一方面，我们可把 (62) 式右边积分移至 $(-3/2)$，得到

$$I_{k_0}(s) = \sum_\rho f^k(\rho - s_0) - E_0 f^{k_0}(-it_0)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{(-3/2)} f^{k_0}(w)\frac{L'}{L}(w + s_0, \chi)dw, \tag{64}$$

其中 $\sum\limits_\rho$ 为对 $L(w, \chi)$ 位于 $-\frac{1}{2}\leqslant \mathrm{Re}\, w \leqslant 1$ 中的零点求和，E_0 仅当 $\chi = \chi^0$ 时才等于 1，其它情形 $E_0 = 0$. 而当 $E_0 = 1$ 时，$|t_0| \geqslant 2$，故有

$$|f^{k_0}(-it_0)| \leqslant \frac{1}{(2A)^k}. \tag{65}$$

由引理 3 可得

$$\left|\frac{L'}{L}\left(-\frac{3}{2} + iv + s_0, \chi\right)\right| = \left|\frac{L'}{L}\left(-\frac{1}{2} + i(v + t_0), \chi\right)\right|$$
$$\leqslant c_2 \log q(|t_0| + |v| + 2).$$

由此即得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(-3/2)} f^{k_0}(w)\frac{L'}{L}(w + s_0, \chi)dw\right|$$
$$\leqslant c_{38}e^{-\frac{3}{2}Ak_0}A^{-k_0}\log q(|t_0| + 2)$$

$$\leqslant C_{39}\left(\frac{1}{A}\right)^{k_0-1} e^{-(\frac{3}{2}A-1)k_0}. \tag{66}$$

只要引理 14 中的 C_{12} 取得适当小，这时 A 就足够大，这样我们从 (64)，(65)，(66) 式及引理 14 的 (13) 式(并参看附注 1) 立即推得

$$|I_{k_0}(s_0)| \geqslant e^{-2c_{14}K}. \tag{67}$$

同样由于 A 可取得足够大，从 (63) 式得到

$$\int_x^{x^6} \frac{|s(y)|}{y} dy \geqslant \frac{A^2}{2c_{11}} e^{-2c_{14}K}.$$

由于 $x = e^{AK}$ 及 $K \geqslant 3$，所以

$$\frac{A^2}{2c_{11}} e^{-2c_{14}K} = \frac{1}{2c_{11}} (\log^2 x) e^{-2c_{14}K-2\log K}$$

$$\geqslant (\log^2 x) e^{-c_{40}K} = (\log^2 x) x^{-c_{40}\tau}.$$

由以上二式即得

$$\int_x^{x^6} \frac{|s(y)|}{y} dy \geqslant x^{-c_{40}\tau} \log^2 x. \tag{68}$$

对上式利用 Schwarz 不等式就得到 (61) 式，证毕.

定理 3 的证明 由第四章定理 2 知，我们只要对充分小的 $1-\alpha$ 来证明(59)式，同时，由于 $\sum\limits_{q\leqslant T} N^*(\alpha, T, q)$是 α 的递减函数，而当 $1-\alpha \ll (\log T)^{-1}$ 时，(59) 式右端为一常数，所以我们只要对

$$\frac{C_{41}}{\log T} \leqslant 1-\alpha \leqslant C_{42} \tag{69}$$

来证明 (59)式，这里 C_{41} 可取得足够大，而 C_{42} 可取得充分小．定理的证明和第四章定理 1，2 的证明方法差不多．这里需要用到大筛法——第二章定理 13，Линник 密度引理——引理 10，以及 Turán 方法——引理 17.

当 $q=1$ 时，$N^*(\alpha, T, 1)$ 是 $\zeta(s)$ 的零点数目，但 $\zeta(s)$ 在区域 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$，$|t| \leqslant 2$ 内仅有有限个零点，所以这一区域可以不考虑，这样，引理 17 中对 $|t_0|$ 的限制条件可满足。

利用第四章定理 1 中的分块方法，把矩形 $\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1$，$|t| \leqslant T$ (当 $\chi = \chi^0$ 时，$2 \leqslant |t| \leqslant T$ 即为二个矩形) 分为边长为 $1-\alpha$ 的小正方形 R_j (当分到 $|t| = T$ 时，可为高不超过 $1-\alpha$ 的小矩形)，并以 I_j 表 R_j 在 $\sigma = 1$ 上的一边．设 $M(R_j, \chi)$ 为 $L(s, \chi)$ 在 R_j 中零点个数，由引理 10 知，当模 $q \leqslant T$ 时有

$$M(R_j, \chi) \ll (1-\alpha)\log T. \tag{70}$$

此外，我们还有

$$N(\alpha, T, \chi) \ll \sum_j M(R_j, \chi) + E_0, \tag{71}$$

其中

$$E_0 = \begin{cases} 1, & \chi = \chi^0, \\ 0, & \chi \neq \chi^0. \end{cases}$$

设 $L(s, \chi)$ 在其中至少有一个零点的小正方形(或小矩形)的个数总共为 $G(\chi)$，我们记为

$$R_{j_{\chi,1}}, R_{j_{\chi,2}}, \cdots, R_{j_{\chi,G(\chi)}}.$$

这样，就有

$$N(\alpha, T, \chi) \ll G(\chi)(1-\alpha)\log T + E_0. \tag{72}$$

现在引理 17，亦即引理 14 中取 $r = 2(1-\alpha)$ (注意条件 (69))，则对任一 $s_0 = 1 + it_0 \in I_{j_{\chi,g}}$ $(g = 1, 2, \cdots G(\chi))$ 都有 (61) 式成立．设 $L \geqslant \max(5, 3c_8c_3)$，并使 $Lr\log T$ 为大于 3 的整数 (注意条件 (69) 式，L 和 r 是无关的)，我们取引理 17 中的 K 为

$$K = Lr\log T.$$

这样一来，就有

$$x = e^{AK} = e^{L\log T} \geqslant T^5. \tag{73}$$

把 (61) 式二边对 t_0 在线段 $I_{j_{\chi,g}}$ $(g = 1, 2, \cdots G(\chi))$ 上积分并相加，我们有

$$\sum_{g=1}^{G(\chi)} \int_{I_{j_{\chi,g}}} \left(\int_x^{x^6} \frac{|S(y; x, t_0, \chi)|^2}{y} dy \right) dt_0$$
$$\geqslant x^{-c_{31}r} G(\chi)(1-\alpha)\log^3 x \gg e^{-c_{31}K} G(\chi)(1-\alpha)\log^3 T$$

$$= T^{-2c_{37}L(1-\alpha)}G(\chi)(1-\alpha)\log^3 T.$$

由此及 (72) 式可得

$$N(\alpha, T, \chi) \ll E_0 + T^{2c_{37}L(1-\alpha)}\log^{-2}T \times \int_{-T}^{T}\left(\int_{x}^{x^6} \frac{|S(y;\, x,\, t_0,\, \chi)|^2}{y}dy\right)dt_0.$$

进而就有

$$\sum_{q\leqslant T}\sum_{\chi_q}{}^{*} N(\alpha, T, \chi) \ll 1 + T^{2c_{37}L(1-\alpha)}\log^{-2}T \times \int_{x}^{x^6}\left(\sum_{q\leqslant T}\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|S(y;\, x, t_0,\, \chi)|^2 dt_0\right)\frac{dy}{y}. \quad (74)$$

在第二章定理 13 中取 $Q = T^2$, 由于这里 $x \geqslant T^5$,所以 $S(y;x,t_0,\chi)$ 的系数满足该定理的条件,故有

$$\sum_{q\leqslant T^2}\log\frac{T^2}{q}\sum_{\chi}{}^{*}\int_{-T}^{T}|S(y;x,\, t_0,\, \chi)|^2 dt_0$$

$$\ll \sum_{x<p\leqslant y}(T^5 + p)\frac{\log^2 p}{p^2} \ll \log^2 T, \quad (x\leqslant y\leqslant x^6).$$

由此推出

$$\sum_{q\leqslant T}\sum_{\chi}{}^{*}\int_{-T}^{T}|S(y;\, x,\, t_0,\, \chi)|^2 dt_0 \ll \log T, \quad (x\leqslant y\leqslant x^6),$$

从上式及 (74) 式即得 (59) 式. 证毕.

本章内容除已引的文献外, 还可参看 [92], [105], [64], [30].

第十一章　Goldbach 数（一）

我们把能够表为二个奇素数之和的偶数称为 Goldbach 数，而把不能够表为二个奇素数之和的偶数称为非 Goldbach 数. 我们把所有不超过 x 的非 Goldbach 数所组成的集合及其个数均用 $E(x)$ 来表示，$E(x)$ 亦称为 Goldbach 数的例外集合. 这样，关于偶数的 Goldbach 猜想就是要证明：当 $x \geqslant 4$ 时有

$$E(x) = 2.$$

本章的主要目的是证明 Montgomery 和 Vaughan[83] 所得到的目前关于 $E(x)$ 的最好估计（§ 2 定理 3），

$$E(x) \ll x^{1-\Delta},$$

这里 Δ 为一可计算的绝对正常数. 最近，在文[21]中定出了 $\Delta > 0.01$. 在证明这一结果之前，我们将先顺便证明较弱的结果（§ 1 定理 2）：对任给正数 A，有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x}.$$

最近，Ramachandra[95] 把这一较弱的估计推广到了小区间的情形，我们将在 § 3 证明这一结果（定理 5）.

显然，这些结果相对于解决关于偶数的 Goldbach 猜想来说是微不足道的，用这样的方法看来也是没有希望解决这一猜想的. 但是，我们从利用了这么多的工具和十分深刻的性质仅能对它得到这么弱的结果这一点可以看出，要最终解决 Goldbach 猜想是存在着多么巨大的困难.

§1. $E(x)$ 的初步估计

设 x 为充分大的正数，以 $D(n, x)$ 表示方程

$$n = p_1 + p_2, \quad 2 < p_1 \leqslant x, \quad 2 < p_2 \leqslant x$$

的解数．显然，当 $n \leqslant 4$ 或 $n > 2x$ 时，恒有

$$D(n, x) = 0.$$

同时，若

$$D(n, x) > 0,$$

则 n 一定是 Goldbach 数．

设

$$S(\alpha, x) = \sum_{2 < p \leqslant x} e(\alpha p),$$

则显然有

$$D(n, x) = \int_0^1 S^2(\alpha, x) e(-\alpha n) d\alpha.$$

现在来应用圆法．设 $Q = \log^\lambda x$, $\tau = xQ^{-1}$, $\lambda \geqslant 9$ 为待定正常数．显然，当 x 充分大时，第六章 § 1 条件(8)满足，所以对所取的 Q 及 τ，我们可以确定基本区间 E_1 及余区间 E_2（见第六章 §1 式(9)及(10))．若设

$$S_1(\alpha, x) = \begin{cases} S(\alpha, x), & \alpha \in E_1, \\ 0, & \alpha \in E_2, \end{cases}$$

及

$$S_2(\alpha, x) = \begin{cases} S(\alpha, x), & \alpha \in E_2, \\ 0, & \alpha \in E_1, \end{cases}$$

我们就有

$$D(n, x) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, x) e(-\alpha n) d\alpha = D_1(n, x) + D_2(n, x),$$

其中[1)]

$$D_1(n, x) = \int_{E_1} S^2(\alpha, x) e(-\alpha n) d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_1^2(\alpha, x) e(-\alpha n) d\alpha,$$

1) 容易证明 $D_1(n, x)$ 及 $D_2(n, x)$ 都是实数．

$$D_2(n, x) = \int_{E_2} S^2(\alpha, x)e(-\alpha n)d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_2^2(\alpha, x)e(-\alpha n)d\alpha.$$

由熟知的 Parseval 等式就得到

$$\sum_n |D_1(n, x)|^2 = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |S_1(\alpha, x)|^4 d\alpha = \int_{E_1} |S_1(\alpha, x)|^4 d\alpha,$$

$$\sum_n |D_2(n, x)|^2 = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |S_2(\alpha, x)|^4 d\alpha = \int_{E_2} |S_2(\alpha, x)|^4 d\alpha. \quad (1)$$

如果能够证明

$$|D_1(n, x)| > |D_2(n, x)|, \quad (2)$$

那末就一定有

$$D(n, x) > 0,$$

因而 n 就一定是 Goldbach 数．至今，对于一个固定的偶数 n 我们并不能证明(2)式成立．但是，利用 Виноградов 证明三素数定理的思想及关系式(1)，我们可以证明：几乎对于所有不超过 x 的偶数 n，都有(2)式成立．以上就是利用圆法来研究关于偶数的 Goldbach 猜想的基本思想．本节将要证明下面的定理

定理 1 对于任意给定的正数 A，区间 $\left(\frac{x}{2}, x\right]$ 中的偶数 n 除了可能有

$$\ll \frac{x}{\log^A x}$$

个例外值外，恒有

$$|D_1(n, x)| > |D_2(n, x)|$$

成立．

若以 $E_1(x)$ 表示区间 $\left(\frac{x}{2}, x\right]$ 中的非 Goldbach 数的个数，则由定理 1 立即推出

$$E_1(x) \ll \frac{x}{\log^A x}.$$

设正整数K满足 $2^K < x^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{K+1}$，则有

$$E(x) \leqslant x^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{K} E_1\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) \ll x^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \frac{x}{2^{k-1}\log^A\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)} \ll \frac{x}{\log^A x}.$$

这样，由定理 1 就可推得本节的主要结果。

定理 2 对于任给的正数 A，我们有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x}.$$

下面我们分若干引理来证明定理 1. 首先估计余区间上的积分 $D_2(n, x)$。

引理 1 设 M 为使

$$|D_2(n, x)| > xQ^{-\frac{1}{3}}$$

的整数 n 的个数，则

$$M \ll xQ^{-\frac{1}{3}}\log^3 x.$$

证 由第六章引理 1 及第五章定理 1[1] 知，当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S(\alpha, x) \ll xQ^{-\frac{1}{2}}\log^2 x.$$

由此及 (1) 式得

$$\sum_n |D_2(n, x)|^2 \leqslant \int_{E_2} |S(\alpha, x)|^4 d\alpha$$

$$\ll x^2Q^{-1}\log^4 x \int_{E_2} |S(\alpha, x)|^2 d\alpha \ll x^3Q^{-1}\log^5 x,$$

因而有

$$Mx^2Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^3Q^{-1}\log^5 x,$$

这就证明了我们的引理。

下面我们来处理基本区间上的积分 $D_1(n, x)$。

引理 2 我们有

---

1) 这里也可以用第五章的 (45) 或 (63) 式，但此时 Q 及对数的方次数需作相应的改变。

$$\sum_{q\leq Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right|\ll\log\log n,$$

其中 $C_q(-n)$ 为 Ramanujan 和(第一章(18'))。

证　由第一章引理 2 可得

$$\sum_{q\leq Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right|=\sum_{q\leq Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}\phi((n,q))$$

$$=\sum_{d|n}\phi(d)\sum_{\substack{q\leq Q\\(q,n)=d}}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}=\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\sum_{\substack{v\leq Q/d\\(v,n/d)=1}}\frac{\mu^2(v)}{\phi^2(v)}$$

$$\ll\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}=\frac{n}{\phi(n)}.$$

由此及熟知的不等式(见 [43, 定理 328])

$$\frac{n}{\phi(n)}\ll\log\log n,\tag{3}$$

就证明了引理。

引理 3　设 $d(n)$ 为除数函数,我们有

$$\sum_{q>Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right|\ll d(n)Q^{-1}(\log\log Q)^2\log\log n.$$

证　由第一章引理 2 及 (3) 式得

$$\sum_{q>Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right|=\sum_{q>Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}\phi((n,q))$$

$$=\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\sum_{\substack{v>Q/d\\(v,n/d)=1}}\frac{\mu^2(v)}{\phi^2(v)}$$

$$\ll(\log\log Q)^2\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\sum_{v>Q/d}\frac{1}{v^2}$$

$$\ll Q^{-1}(\log\log Q)^2\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)d}{\phi(d)}$$

$$\ll Q^{-1}(\log\log Q)^2(\log\log n)2^{\nu_1(n)},$$

这里 $\nu_1(n)$ 为 n 的不同的素因子的个数. 由于 $2^{\nu_1(n)}\leq d(n)$, 这就证明了引理.

引理 4　级数

$$\mathfrak{S}_2(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)$$

绝对收敛,且有

$$\mathfrak{S}_2(n) = \frac{n}{\phi(n)} \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right). \tag{4}$$

证　由引理 2 或 3 均可推出级数 $\mathfrak{S}_2(n)$ 为绝对收敛,因而有

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2(n) &= \prod_{p} \left(1 + \frac{C_p(-n)}{(p-1)^2}\right) \\ &= \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right),\end{aligned}$$

这就证明了(4)式. 上式最后一步用到了(第一章引理 2)

$$C_p(-n) = \begin{cases} p-1, & p \mid n, \\ -1, & p \nmid n. \end{cases}$$

由(4)容易推得: 当 n 为奇数时

$$\mathfrak{S}_2(n) = 0; \tag{5}$$

当 n 为偶数时,由于

$$1 > \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以

$$1 \leqslant \frac{1}{2} \frac{n}{\phi(n)} < \mathfrak{S}_2(n) < \frac{n}{\phi(n)}. \tag{6}$$

把 $\mathfrak{S}_2(n)$ 和第七章(40)式所定义的 $c(n)$ 相比较，容易看出，当 n 为偶数时有

$$\mathfrak{S}_2(n) = 2c(n). \tag{7}$$

引理 5　设 $\frac{1}{2}x < n \leqslant x$, 我们有

$$\begin{aligned}D_1(n, x) = &\left(\sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)\right) \frac{n}{\log^2 n} \\ &+ O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

证　这和第六章引理 5 的(34)式的证明相类似. 当 $\alpha \in E_1$

时，由第六章引理3知

$$S^2(\alpha, x) = \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log m} + O(x^2 e^{-c\sqrt{\log x}}),$$

这里 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q, h) \subset E_1$. 所以

$$D_1(n, x) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{h=0}^{q-1} \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, x) e(-\alpha n) d\alpha$$

$$= \left(\sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n) \right)$$

$$\times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log m} \right)^2 e(-zn) dz.$$

利用第六章(29)，(30)，(31)式及 $Q = \log^\lambda x$，$\tau = xQ^{-1}$，我们有

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left[\left(\sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log m} \right)^2 - \left(\sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log [x]} \right)^2 \right] e(-zn) dz$$

$$\ll \frac{x}{\log^2 x} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \min \left(\frac{[x]}{\log [x]}, \frac{1}{|z| \log [x]} \right) dz$$

$$\ll \frac{x}{\log^2 x} \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{x}{\log x} dz + \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{Q}{x}} \frac{dz}{z \log x} \right)$$

$$\ll \frac{x}{\log^3 x} \log Q \ll \frac{x \log\log x}{\log^3 x}.$$

由以上二式及引理2即得

$$D_1(n, x) = \left(\sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n) \right)$$

$$\times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log [x]} \right)^2 e(-zn) dz$$

$$+ O\left(\frac{x (\log\log x)^2}{\log^3 x} \right).$$

利用第六章估计(29)式有

$$\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1} e(zm)\right)^2 e(-zn)dz \ll \tau,$$

及

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1} e(zm)\right)^2 e(-zn)dz \ll \tau.$$

由以上三式，引理 2 并利用 $\lambda \geqslant 9$ 即得

$$D_1(n, x) = \left(\sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)\right)$$
$$\times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log [x]}\right)^2 e(-zn)dz$$
$$+ O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right).$$

由于 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$，我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1} e(zm)\right)^2 e(-zn)dz = \sum_{\substack{n=m_1+m_2 \\ 2\leqslant m_1,\ m_2\leqslant [x]-1}} 1 = n + O(1).$$

从以上二式及引理 2 即得 (8) 式，引理证毕.

定理 1 的证明 取 $\lambda = 3A + 9$，$Q = \log^{\lambda} x$，$\tau = x\log^{-\lambda} x$. 由引理 5，引理 3 推得

$$D_1(n, x) = \mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x}{\log^2 x} d(n) Q^{-1}(\log\log x)^3\right)$$
$$+ O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right).$$

由第三章引理 2 知

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) \ll x\log x.$$

所以在 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 中，使

$$d(n) > Q\log^{-1} x$$

的 n 的个数

$$\ll xQ^{-1}\log^2 x.$$

因此，在 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 中除去 $\ll xQ^{-1}\log^2 x$ 个例外值 n 外，总有

$$D_1(n, x) = \mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x(\log\log x)^3}{\log^3 x}\right).$$

由上式，引理 1 及 (6) 式知，对充分大的 x，当 n 为偶数，$\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 时(注意这里 $\lambda > 9$)，除了

$$\ll xQ^{-1/3}\log^3 x = x\log^{-4} x$$

个例外值 n 外，一定有

$$|D_1(n, x)| > |D_2(n, x)|,$$

这就证明了定理 1.

从以上圆法所得到的结果，人们猜测，如果关于偶数的 Goldbach 猜想正确的话，应该有

$$D(n) \sim \mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n}, \tag{9}$$

这里 n 为偶数，$D(n)$ 为 n 表为二个奇素数之和的表法的个数.

§2. $E(x)$ 的进一步估计

本节将得到比定理 2 更强的估计，我们要证明下面的定理

定理 3 存在一个可计算的绝对正常数 Δ，使得

$$E(x) \ll x^{1-\Delta}.$$

定理 3 的证明方法在原则上和定理 2 是一样的. 我们可以看出，如果 §1 中的所有结论，当把 Q 放大到 x^η ($\eta < 1$ 为一正数)时仍然正确，那末我们就立即得到了定理 3. 而 §1 中的所有结论除引理 5 外，都显然和 Q 的阶无关. 所以把 Q 放大到 x^η 时仍是正确的. 但在引理 5 中，我们应用了 Siegel-Walfisz 定理 (因为应用了第六章引理 3)，而 Q 放大到 x^η 时，就不能如此简单地应用 Siegel-Walfisz 定理，因此也就推不出引理 5 来. 这时需要作十分细致的

考虑，情况变得极为复杂. 同时为了使得常数可以计算，还一定要避开 Siegel-Walfisz 定理，而用 Page 定理来代替它.

放大 Q 就是放大基本区间，在圆法中，基本区间的放大就会带来许多新的困难. 而这些困难的克服，在本质上依赖于对 L 函数零点性质的进一步研究. 现在要把 Q 放大到 x^η，就需要第十章所证明的有关 L 函数零点的那些十分深刻的性质.

设 x 为充分大的正数，$Q = x^\eta$，$\tau = xQ^{-1}$，$\eta < \frac{1}{4}$ 为一待定正常数. 为了便于利用 L 函数的性质，代替 §1 中的 $S(\alpha, x)$，我们考虑

$$\hat{S}(\alpha) = \hat{S}(\alpha; x, Q) = \sum_{Q < p \leqslant x} \log p e(\alpha p). \tag{10}$$

相应地，代替 $D(n, x)$，要考虑

$$\hat{D}(n) = \hat{D}(n; x, Q) = \sum_{\substack{n = p_1 + p_2 \\ Q < p_1, p_2 \leqslant x}} \log p_1 \log p_2.$$

显然有

$$\hat{D}(n) = \int_0^1 (\hat{S}(\alpha))^2 e(-\alpha n) d\alpha,$$

及

$$\hat{D}(n) = 0, \quad \text{当 } n \leqslant 2Q, \text{ 或 } n > 2x.$$

且若

$$\hat{D}(n) > 0,$$

则 n 一定是 Goldbach 数.

现来应用圆法. 对所取的 Q 及 τ，当 x 充分大时第六章 §1 条件 (8) 满足，我们以 E_1 及 E_2 分别表示由所取的 Q 及 τ 所确定的基本区间及余区间(见第六章 §1 (9) 及 (10)). 同样，若设

$$\hat{S}_1(\alpha) = \begin{cases} \hat{S}(\alpha), & \alpha \in E_1, \\ 0, & \alpha \in E_2, \end{cases}$$

及

$$\hat{S}_2(\alpha) = \begin{cases} \hat{S}(\alpha), & \alpha \in E_2, \\ 0, & \alpha \in E_1, \end{cases}$$

则有

$$\hat{D}(n)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}(\hat{S}(\alpha))^2 e(-n\alpha)d\alpha=\hat{D}_1(n)+\hat{D}_2(n),$$

其中

$$\hat{D}_1(n)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}(\hat{S}_1(\alpha))^2 e(-\alpha n)d\alpha,$$

$$\hat{D}_2(n)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}(\hat{S}_2(\alpha))^2 e(-\alpha n)d\alpha.$$

由 Parseval 等式即得

$$\sum_n|\hat{D}_2(n)|^2=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}|\hat{S}_2(\alpha)|^4 d\alpha=\int_{E_2}|\hat{S}(\alpha)|^4 d\alpha. \qquad (11)$$

和 § 1 中的论证完全一样，由下面的定理立即可推出定理 3.

定理 4 存在一个可计算的绝对正常数 Δ，使得区间 $\left(x, \frac{x}{2}\right]$ 中的偶数 n，除了可能有

$$\ll x^{1-\Delta}$$

个例外值外，恒有

$$|\hat{D}_1(n)|>|\hat{D}_2(n)|.$$

下面我们就来证明定理 4. 为此要分别讨论 $\hat{D}_1(n)$ 及 $\hat{D}_2(n)$. 首先，和引理 1 相同，对余区间上的积分 $\hat{D}_2(n)$ 我们有

引理 6 设 M 为使

$$|\hat{D}_2(n)|>xQ^{-\frac{1}{5}}$$

的整数 n 的个数，则

$$M\ll xQ^{-\frac{1}{5}}\log^{24}x.$$

证 由第六章引理 1 及第五章 (44)[1] 知，当 $\alpha\in E_2$ 时有

$$\hat{S}(\alpha)\ll xQ^{-\frac{1}{2}}\log^{12}x.$$

由此及 (11) 式得

---

1) 这里也可以利用第五章的 (62) 式，但这时 Q 及对数的方次都需作相应的改变。

$$\sum_n |\hat{D}_2(n)|^2 \leqslant \int_{E_2} |\hat{S}(\alpha)|^4 d\alpha \ll x^2 Q^{-1} \log^{24} x$$

$$\times \int_0^1 |\hat{S}(\alpha)|^2 d\alpha \ll x^3 Q^{-1} \log^{24} x.$$

因而有

$$M x^2 Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^3 Q^{-1} \log^{24} x.$$

这就证明了引理.

估计基本区间上的积分 $\hat{D}_1(n)$ 是极其复杂的. 我们将分 (A), (B), (C), (D) 四部分来讨论它. 以下恒假定 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$.

(A) $\hat{D}_1(n)$ 的分解式

设 $\chi \bmod q$, $q \leqslant Q$,

$$\hat{S}(\theta, \chi) = \sum_{Q < p \leqslant x} \chi(p) \log p e(p\theta). \tag{12}$$

由第二章 (16′) 容易推得

$$e\left(\frac{h}{q}\right) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \chi(h) \tau(\bar{\chi}), \quad (h, q) = 1.$$

当 $q \leqslant Q < p$ 时,一定有 $(q, p) = 1$, 所以

$$e\left(\frac{hp}{q}\right) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \chi(hp) \tau(\bar{\chi}),$$

$$(h, q) = 1, \quad q \leqslant Q < p. \tag{13}$$

设 $\alpha \in I(q, h) \subset E_1$,

$$\alpha = \frac{h}{q} + \theta, \quad (h, q) = 1, \quad q \leqslant Q, \quad |\theta| \leqslant \frac{1}{\tau}. \tag{14}$$

由 (10), (12), (13) 及 (14) 式我们有

$$\hat{S}(\alpha) = \sum_{Q < p \leqslant x} \log p e(p\theta) \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \chi(hp) \tau(\bar{\chi})$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \chi(h) \tau(\bar{\chi}) \hat{S}(\theta, \chi). \tag{15}$$

对于这儿所取的 Q, 我们以 $\tilde{q} \leqslant Q$, $\tilde{\chi} \bmod \tilde{q}$, 及 $\tilde{\beta}$ 分别表示第十章引理 7 中可能存在的例外模, 例外原特征及例外零点. 再

设

$$T(\theta)=\sum_{Q<m\leqslant x}e(m\theta),\tag{16}$$

$$\widetilde{T}(\theta)=\sum_{Q<m\leqslant x}m^{\tilde{\beta}-1}e(m\theta),\tag{17}$$

并令

$$\begin{cases}\hat{S}(\theta,\chi_q^0)=T(\theta)+W(\theta,\chi_q^0),\\ \hat{S}(\theta,\chi_q^0\tilde{\chi})=\widetilde{T}(\theta)+W(\theta,\chi_q^0\tilde{\chi}),\ \tilde{q}|q,\\ \hat{S}(\theta,\chi_q)=W(\theta,\chi_q),\ \chi_q\neq\chi_q^0,\text{及当}\ \tilde{q}|q\ \text{时}\ \chi_q\neq\chi_q^0\tilde{\chi}.\end{cases}\tag{18}$$

这样当 $\alpha\in E_1$ 时，由（15），（18）式得到

$$\hat{S}(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\theta)+E_0\frac{\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\bar{\tilde{\chi}}(h)}{\phi(q)}\widetilde{T}(\theta)+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})W(\theta,\chi),\tag{19}$$

其中

$$E_0=\begin{cases}1, & \tilde{q}|q,\\ 0, & \tilde{q}\nmid q.\end{cases}$$

所以我们就有

$$\begin{aligned}\hat{D}_1(n)&=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{h=0}^{q-1}\int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}}(\hat{S}(\alpha))^2e(-n\alpha)d\alpha\\ &=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{h=0}^{q-1}{}'e\left(-\frac{hn}{q}\right)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left[\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\theta)\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})W(\theta,\chi)\right]^2e(-n\theta)d\theta\\ &\quad+\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}|q}}\sum_{h=0}^{q-1}{}'e\left(-\frac{hn}{q}\right)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left[\left(\frac{\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\bar{\tilde{\chi}}(h)}{\phi(q)}\widetilde{T}(\theta)\right)^2\right.\\ &\quad+2\left(\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\theta)+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})W(\theta,\chi)\right)\\ &\quad\left.\times\left(\frac{\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\bar{\tilde{\chi}}(h)}{\phi(q)}\widetilde{T}(\theta)\right)\right]e(-n\theta)d\theta\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{6} \hat{D}_{1,j}(n), \tag{20}$$

其中

$$\hat{D}_{11}(n) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n) \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T^2(\theta) e(-n\theta) d\theta, \tag{21}$$

$$\hat{D}_{12}(n) = 2 \sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} \sum_{\chi_q} \tau(\bar{\chi}) G_\chi(-n) \times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T(\theta) W(\theta, \chi) e(-n\theta) d\theta, \tag{22}$$

$$\hat{D}_{13}(n) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{1}{\phi^2(q)} \sum_{\chi_q} \sum_{\chi'_q} \tau(\bar{\chi}) \tau(\bar{\chi}') G_{\chi\chi'}(-n) \times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} W(\theta, \chi) W(\theta, \chi') e(-n\theta) d\theta, \tag{23}$$

$$\hat{D}_{14}(n) = \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)} \tau^2(\chi_q^0 \bar{\chi}) \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} (\tilde{T}(\theta))^2 e(-n\theta) d\theta \tag{24}$$

$$\hat{D}_{15}(n) = 2 \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} G_{\chi_q^0 \tilde{\chi}}(-n) \tau(\chi_q^0 \tilde{\chi}) \times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T(\theta) \tilde{T}(\theta) e(-n\theta) d\theta, \tag{25}$$

$$\hat{D}_{1,6}(n) = 2 \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{\tau(\chi_q^0 \bar{\chi})}{\phi^2(q)} \sum_{\chi_q} G_{\chi\tilde{\chi}}(-n) \tau(\bar{\chi}) \times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \tilde{T}(\theta) W(\theta, \chi) e(-n\theta) d\theta, \tag{26}$$

这里 $C_q(-n)$, $G_\chi(-n)$ 等的定义见第二章(1)及(18)式. 这就是 $\hat{D}_1(n)$ 的分解式. 我们将证明 $\hat{D}_{1,1}(n)$ 及 $\hat{D}_{1,4}(n)$ 是它的主要项. 这就表明了 $\hat{S}(\theta, \chi)$, 当例外原特征不存在时,除了 $\chi = \chi^0$ 外都是比较小的;当例外原特征存在时,则除了 $\chi = \chi^0$ 及当 $\tilde{q}|q$ 时, $\chi = \chi_q^0 \bar{\chi}$ 这二种情形外, 亦都是比较小的. 这种复杂性是由于把

Q 放大到了 x^{η} 及可能存在例外零点 $\tilde{\beta}$ 所引起的。

(B) $\hat{D}_{1j}(n)$ **的估计**

首先我们来证明一个引理

引理 7 当 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 时，我们有

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T^2(\theta)e(-n\theta)d\theta = n + O(\tau), \tag{27}$$

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} (\tilde{T}(\theta))^2 e(-n\theta)d\theta = \tilde{I}(n) + O(\tau), \tag{28}$$

这里

$$\tilde{I}(n) = \sum_{Q<m\leqslant n-Q} (m(n-m))^{\tilde{\beta}-1}, \tag{29}$$

以及

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T(\theta)\tilde{T}(\theta)e(-n\theta)d\theta = \tilde{J}(n) + O(\tau), \tag{30}$$

这里

$$\tilde{J}(n) = \sum_{Q<m\leqslant n-Q} m^{\tilde{\beta}-1}. \tag{31}$$

证 由第六章 (29) 式不难得到：当 $\langle\eta\rangle > 0$ 时，

$$T(\theta) \ll \frac{1}{\langle\theta\rangle} \quad 及 \quad \tilde{T}(\theta) \ll \frac{1}{\langle\theta\rangle}.$$

故而有

$$\int_{\pm\frac{1}{\tau}}^{\pm\frac{1}{2}} |T(\theta)|^2 d\theta \ll \tau \quad 及 \quad \int_{\pm\frac{1}{\tau}}^{\pm\frac{1}{2}} |\tilde{T}(\theta)|^2 d\theta \ll \tau.$$

此外我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T^2(\theta)e(-n\theta)d\theta = \sum_{Q<m\leqslant n-Q} 1,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tilde{T}(\theta))^2 e(-n\theta)d\theta = \tilde{I}(n),$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(\theta)\tilde{T}(\theta)e(-n\theta)d\theta = \tilde{J}(n).$$

综合以上结果就证明了引理．

在估计 $\hat{D}_{1,i}(n)$ 之前，我们先指出下面的一个事实：设 $q \leqslant Q$，$\chi_q \Longleftrightarrow \chi_q^*$，则一定有

$$S(\theta, \chi) = S(\theta, \chi^*), \tag{32}$$

及

$$W(\theta, \chi) = W(\theta, \chi^*). \tag{33}$$

这是由于求和范围 $Q < p \leqslant x$ 所决定的，因当 $q \leqslant Q$ 时，总有 $(p, q) = 1$.

(1) $\hat{D}_{1,2}(n)$，$\hat{D}_{1,3}(n)$，$\hat{D}_{1,6}(n)$ 的估计

利用（33）式，由（22）式得

$$\hat{D}_{1,2}(n) = 2 \sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ d | q}} \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} \tau(\chi_q^0 \overline{\chi}_d) G_{\chi_q^0 \chi_d}(-n)$$

$$\times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(\theta) W(\theta, \chi_d) e(-n\theta) d\theta.$$

由于

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T(\theta)|^2 d\theta \leqslant x,$$

利用 Schwarz 不等式有

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(\theta) W(\theta, \chi_d) e(-n\theta) d\theta \right| \leqslant x^{\frac{1}{2}} W(\chi_d),$$

其中

$$W(\chi_d) = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |W(\theta, \chi_d)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

这样就得到了

$$|\hat{D}_{1,2}(n)| \leqslant 2x^{\frac{1}{2}} \sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d)$$

$$\times \left(\sum_{\substack{q \leqslant Q \\ d | q}} \left| \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} \tau(\chi_q^0 \overline{\chi}_d) G_{\chi_q^0 \chi_d}(-n) \right| \right)$$

$$\leqslant 64 x^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\phi(n)} W, \tag{35}$$

其中

$$W = \sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d), \tag{36}$$

(35)式的最后一步用到了第一章引理 7 (取 $r_1 = d$, $r_2 = 1$).

用完全同样的方法可以得到

$$|\hat{D}_{1,3}(n)| \leqslant 32 \frac{n}{\phi(n)} W^2, \tag{37}$$

$$|\hat{D}_{1,6}(n)| \leqslant 64 x^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\phi(n)} W. \tag{38}$$

(2) $\hat{D}_{1,1}(n)$ 的估计

由 (21) 及 (27) 知

$$\hat{D}_{1,1}(n) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)(n + O(\tau)).$$

由引理 2, 引理 3, 引理 4, $\tau = xQ^{-1}$ 及对任意小的 ε 有 $d(n) \ll x^{\varepsilon/2}$, 从上式就得到

$$\hat{D}_{1,1}(n) = \mathfrak{S}_{\chi}(n) n + O(x^{1+\varepsilon} Q^{-1}). \tag{39}$$

(3) $\hat{D}_{1,5}(n)$ 的估计

由 (25), (30) 并利用 $\tilde{J}(n) \leqslant x$ 可得

$$\begin{aligned} \hat{D}_{1,5}(n) &= 2 \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} G_{\chi_q^0 \tilde{\chi}}(-n) \tau(\chi_q^0 \tilde{\chi})(\tilde{J}(n) + O(\tau)) \\ &\ll x \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \left| G_{\chi_q^0 \tilde{\chi}}(-n) \tau(\chi_q^0 \tilde{\chi}) \right| \\ &\leqslant x \sum_{\substack{q = 1 \\ \tilde{q} | q}}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \left| G_{\chi_q^0 \tilde{\chi}}(-n) \tau(\chi_q^0 \tilde{\chi}) \right|. \end{aligned}$$

在第一章引理 7 中取 $r_1 = \tilde{q}$, $r_2 = 1$, 由其中 (51) 及 (52) 式即得

$$\hat{D}_{1,5}(n) \ll \mu^2(q) \tilde{\chi}^2(n) \frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})} \frac{n}{\phi(n)} x. \tag{40}$$

(4) $\hat{D}_{1,4}(n)$ 的估计

由 (24) 及 (28) 式得到

$$\hat{D}_{1,4}(n)=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}|q}}\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})(\tilde{I}(n)+O(\tau)).\qquad(41)$$

令 $q=\tilde{q}k$，利用第一章引理 3 及 $C_q(-n)$ 对 q 的可乘性，有

$$\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})=\frac{C_{\tilde{q}}(-n)}{\phi^2(\tilde{q})}\tau^2(\tilde{\chi})\tilde{\chi}^2(k)\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}C_k(-n)$$

$$=\tilde{\chi}(-1)\frac{\tilde{q}C_{\tilde{q}}(-n)}{\phi^2(\tilde{q})}\tilde{\chi}^2(k)\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}C_k(-n),\qquad(42)$$

最后一步用到第一章引理 6，及对于实特征 χ 有

$$\overline{\tau(\chi)}=\chi(-1)\tau(\chi).$$

由上式，引理 3 及第一章引理 2 我们有

$$\sum_{\substack{q>Q\\ \tilde{q}|q}}\left|\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})\right|$$

$$=\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\left|C_{\tilde{q}}(-n)\right|\sum_{\substack{k>Q/\tilde{q}\\ (k,\tilde{q})=1}}\left|\frac{\mu^2(k)C_k(-n)}{\phi^2(k)}\right|$$

$$\ll\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\mu^2\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\phi(\tilde{q})\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)$$

$$\times d(n)\frac{\tilde{q}}{Q}(\log\log x)^3\ll(n,\tilde{q})x^{\varepsilon}Q^{-1},\qquad(43)$$

其中 ε 为任意小的正常数．同样由 (42) 式，引理 2，及第一章引理 2 可得

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}|q}}\left|\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})\right|$$

$$=\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\left|C_{\tilde{q}}(-n)\right|\sum_{\substack{k\leqslant Q/\tilde{q}\\ (k,\tilde{q})=1}}\left|\frac{\mu^2(k)C_k(-n)}{\phi^2(k)}\right|\ll x^{\varepsilon}.\qquad(44)$$

这样由 (41)，(43)，(44) 式及 $\tilde{I}(n)\leqslant x$ 得

$$\hat{D}_{1,4}(n)=\mathfrak{S}_2(n)\tilde{I}(n)+O((n,\tilde{q})x^{1+\varepsilon}Q^{-1}),\qquad(45)$$

其中

$$\mathfrak{S}_2(n)=\sum_{\substack{q=1\\ \tilde{q}|q}}^{\infty}\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi}).\qquad(46)$$

综合(35),(37),(38),(39),(40)及(45)各式,最后得到

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \mathfrak{S}_2(n)n - |\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)\tilde{I}(n)| - 128\frac{n}{\phi(n)}(x^{\frac{1}{2}}W + W^2)$$

$$+ O(x^{1+\varepsilon}Q^{-1}) + O\left(\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\frac{n}{\phi(n)}x\right)$$

$$+ O((n, \tilde{q})x^{1+\varepsilon}Q^{-1}), \tag{47}$$

其中 ε 为任意小的正数. 这样,对 $\hat{D}_1(n)$ 的讨论就归结为:估计 W 以及当例外原特征存在时需要进一步处理 $\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)$, $\tilde{I}(n)$ 和因此而出现的余项.

(C) **W 的估计**

估计 W(见(36))是证明定理 4,亦即定理 3 的关键所在。实现这一估计的基础是第十章中所证明的有关 L 函数的二个十分深刻的性质,即定理 2 和定理 3.

引理 7 设 $Q = x^{\eta}$, $0 < \eta < \frac{1}{10}$, $\tilde{\beta}$ 是第十章引理 7 中的例外零点,我们有

$$W \leqslant \frac{2}{3}\pi x^{\frac{1}{2}} \sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}{}' \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta - 1} + O(x^{\frac{1}{2}}Q^{-1}\log^2 x), \tag{48}$$

这里 $\rho = \beta + i\gamma$ 为 $L(s, \chi_d)$ 的零点, $\sum'$ 表示对除 $\tilde{\beta}$ 外的所有非显明零点求和.

证 对 $W(\chi_d)(d \leqslant Q)$ 应用第二章引理 2,并注意到(18),(12),(16)及(17)式,我们有

$$W(\chi_d) \leqslant \frac{\pi}{\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{\substack{Q < p \leqslant x \\ t - \frac{\tau}{2} < p \leqslant t}}{}^{\#} \chi_d(p)\log p\Big|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

其中

$$\sum_{K < p \leqslant K+h}{}^{\#} \chi_d(p)\log p = \begin{cases} \displaystyle\sum_{K < p \leqslant K+h} \log p - \sum_{K < n \leqslant K+h} 1, & \chi_d = \chi_d^0, \\ \displaystyle\sum_{K < p \leqslant K+h} \chi_d(p)\log p + \sum_{K < n \leqslant K+h} n^{\tilde{\beta}-1}, & \tilde{q} \mid d, \quad \chi_d = \chi_d^0\tilde{\chi}, \\ \displaystyle\sum_{K < p \leqslant K+h} \chi_d(p)\log p, & \text{其它}, \end{cases} \tag{50}$$

这里 $d \leqslant Q \leqslant K$. 显然，我们有

$$W(\chi_d) \leqslant \frac{\pi}{\tau}\left(\int_Q^{x+\frac{\tau}{2}}\Bigg|\sum_{\substack{Q<p\leqslant x\\ t-\frac{\tau}{2}<p\leqslant t}}\chi_d(p)\log p\Bigg|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{\tau}\left(\int_Q^{x+\frac{\tau}{2}}\Bigg|\sum_{\substack{xQ^{-4}<p\leqslant x\\ t-\frac{\tau}{2}<p\leqslant t}}\chi_d(p)\log p\Bigg|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}+O(x^{\frac{1}{2}}Q^{-3})$$

$$\leqslant \max_{xQ^{-4}\leqslant K\leqslant 2x}\ \max_{h\leqslant\frac{\tau}{2}}\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\Bigg|\sum_{K<p\leqslant K+h}{}^{\#}\chi_d(p)\log p\Bigg|+O(x^{\frac{1}{2}}Q^{-3}). \qquad (51)$$

由第五章§2引理 11，第十章引理 7 以及

$$\sum_{\substack{n=p^k\leqslant x\\ k\geqslant 2}}\chi(n)\Lambda(n)\ll x^{\frac{1}{2}}\log^2 x$$

容易推得：若取 $T=Q^4$，当 $d\leqslant Q$ 时，对原特征 $\chi_d(n)$ 一致地有

$$\sum_{p\leqslant x}\chi_d(p)=E_0x-E_1\frac{x^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}-\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\frac{x^\rho}{\rho}+O(xQ^{-4}\log^2 x).$$

由此即得

$$\sum_{K<p\leqslant K+h}\chi_d(p)\log p=E_0h-E_1\left(\frac{(K+h)^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}-\frac{K^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}\right)$$

$$-\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\left(\frac{(K+h)^\rho}{\rho}-\frac{K^\rho}{\rho}\right)+O(xQ^{-4}\log^2 x).$$

由上式，(50)式及

$$\frac{(K+h)^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}-\frac{K^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}=\int_K^{K+h}t^{\tilde\beta-1}dt=\sum_{K<n\leqslant K+h}n^{\tilde\beta-1}+O(1)$$

知，当 $xQ^{-4}\leqslant K\leqslant 2x$，$h\leqslant\dfrac{\tau}{2}$ 时有

$$\Bigg|\sum_{K<p\leqslant K+h}{}^{\#}\chi_d(p)\log p\Bigg|=\Bigg|\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\int_K^{K+h}t^{\rho-1}dt\Bigg|+O(xQ^{-4}\log^2 x)$$

$$\leqslant\frac{\tau}{2}\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1}+O(xQ^{-4}\log^2 x). \qquad (52)$$

由此及(51)即得(48)式，引理证毕.

引理 8 在引理 7 的符号下，我们有

$$\sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}^{*} \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}' \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} \leqslant 2 c_{35} e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + O(x^{-\frac{1}{4}}).$$

其中 c_{35} 为第十章定理 3 (59) 式中的常数[1]，η_1 和 η 分别由下面 (54) 和 (58) 式所确定.

证 设 c_6 是第十章引理 7 中的常数，c_{20}，c_{21} 是第十章定理 2 中的常数. 我们取

$$A_1 = \frac{1}{6} \min(c_6, c_{20}, c_{21}). \tag{53}$$

(a) 若例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在且 $\tilde{\delta} \log Q \leqslant A_1$，$\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$，则由第十章定理 2 知函数 $\prod\limits_{d \leqslant Q} \prod\limits_{\chi_d}^{*} L(s, \chi_d)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A_1}{\log Q} \log \frac{e A_1}{\tilde{\delta} \log Q}, \quad |t| \leqslant Q^4$$

中除 $\tilde{\beta}$ 外无其它零点；(b) 若 $\tilde{\beta}$ 不存在，或存在但 $\tilde{\delta} \log Q > A_1$，则由第十章引理 7 知，函数 $\prod\limits_{d \leqslant Q} \prod\limits_{\chi_d}^{*} L(s, \chi_d)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A_1}{\log Q}, \quad |t| \leqslant Q^4$$

中无零点. 为简单起见，令

$$\eta_1 = A_1 \log \frac{e A_1}{\delta_0 \log Q}, \tag{54}$$

这里

$$\delta_0 = \begin{cases} \tilde{\delta}, & \tilde{\delta} \log Q \leqslant A_1, \\ \dfrac{A_1}{\log Q}, & \tilde{\delta} \log Q > A_1 \text{ 或 } \tilde{\beta} \text{ 不存在}, \end{cases} \tag{55}$$

则由以上二种情况知，函数 $\prod\limits_{d \leqslant Q} \prod\limits_{\chi_d}^{*} L(s, \chi_d)$ 在区域

---

1) 本节中所有常数编号，都和第十章中相同.

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\eta_1}{\log Q}, \quad |t| \leqslant Q^4 \tag{56}$$

内仅可能除去 $\tilde{\beta}$ 外无零点. 这样,我们就有

$$\sum_{d<Q} \sum_{\chi_d}{}^* \sum_{|\gamma|<Q^4}{}' \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} = -\int_0^{1-\eta_1/\log Q} \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\alpha-1} d_\alpha N^*(\alpha, Q), \tag{57}$$

这里

$$N^*(\alpha, Q) = \sum_{d<Q} N^*(\alpha, Q^4, d).$$

由第十章定理 3 可得

$$N^*(\alpha, Q) \leqslant c_{35} Q^{4C_{36}(1-\alpha)},$$

以及由第四章定理 2 知

$$N^*(0, Q) \ll Q^7.$$

故从(57)式及 $Q = x^\eta$ 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{d\leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^* \sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}' \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} \\
&= \int_0^{1-\eta_1/\log Q} \left(\log \frac{x}{Q^4}\right) \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\alpha-1} N^*(\alpha, Q) d\alpha + O(x^{-1}Q^{11}) \\
&\leqslant c_{35} \log \frac{x}{Q^4} \int_0^{1-\eta_1/\log Q} \left(\frac{x}{Q^{4+4C_{36}}}\right)^{\alpha-1} d\alpha + O(x^{-1}Q^{11}) \\
&= c_{35} \frac{1-4\eta}{1-(4+4c_{36})\eta} e^{-(1-(4+4C_{36}))\frac{\eta_1}{\eta}} \\
&\quad + O(x^{-1+(4+4C_{36})\eta}) + O(x^{-1}Q^{11}).
\end{aligned}$$

只要取正数 η 满足

$$\eta \leqslant \min\left(\frac{1}{22}, \frac{1}{8(1+c_{36})}\right), \tag{58}$$

则由前式即得(52)式,证毕.

由引理 7 及引理 8 立刻得到

$$W \leqslant \frac{4\pi}{3} c_{35} x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + O(x^{\frac{1}{2}-\eta}\log^2 x). \tag{59}$$

(D) $\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)$ 及 $\tilde{I}(n)$ 的进一步计算

引理 9 当 n 为奇数时

$$\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)=0,$$

当 n 为偶数时

$$\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)=\tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\prod_{\substack{p\mid\tilde{q}\\ p\nmid n}}\frac{1}{p-2}\mathfrak{S}_2(n). \tag{60}$$

证　由(46)，(42)式及第一章引理2得

$$\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)=\tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\tilde{q}\phi^{-1}(\tilde{q})\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)$$

$$\times\sum_{\substack{k=1\\(k,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}C_k(-n)$$

$$=\tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\frac{\tilde{q}}{\phi(\tilde{q})}\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)$$

$$\times\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right). \tag{61}$$

当 $n,\tilde{q}$ 均为奇数时，显然有 $\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)=0$. 当 n 为奇数，$\tilde{q}$ 为偶数时，由第一章§1性质12知，一定有 $4\nmid\tilde{q}$，故有 $\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)=0$，所以亦得 $\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)=0$. 当 n 为偶数时，有

$$\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$

$$=\prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}$$

$$\times\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{-1}$$

$$=\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\mid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{-1}\mathfrak{S}_2(n)$$

$$=\frac{\phi(\tilde{q})}{\tilde{q}}\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(\frac{1}{p-2}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}(p-1)\mathfrak{S}_2(n). \tag{62}$$

再由第一章§1性质12知，$\tilde{q}$ 的标准分解式一定形如

$$\tilde{q}=2^l p_1p_2\cdots p_s,\quad l=0,2,3,$$

所以总有

$$\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}(p-1)=\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right).$$

由上式及 (61), (62) 式即得 (60) 式, 引理证毕.

引理 10 设 $\tilde{I}(n)$ 由 (29) 式所确定, $\frac{x}{2}<n\leqslant x$, 我们有

$$\tilde{I}(n)\leqslant n^{\tilde{\beta}}, \tag{63}$$

及

$$n-n^{\tilde{\beta}}\geqslant\begin{cases}\frac{n}{2}, & \tilde{\beta}<1-\frac{\log 2}{\log n},\\ \frac{1}{2}(1-\tilde{\beta})n\log n, & \tilde{\beta}\geqslant 1-\frac{\log 2}{\log n}.\end{cases} \tag{64}$$

证　由于当 $a\geqslant 2$, $b\geqslant 2$ 时,

$$ab\geqslant a+b,$$

故有

$$\tilde{I}(n)=\sum_{Q<m\leqslant n-Q}(m(n-m))^{\tilde{\beta}-1}\leqslant n^{\tilde{\beta}},$$

这就证明了 (63) 式. 再从

$$n-n^{\tilde{\beta}}\geqslant n-n^{1-\frac{\log 2}{\log n}}=\frac{n}{2},\quad \tilde{\beta}<1-\frac{\log 2}{\log n},$$

及

$$n-n^{\tilde{\beta}}=\int_{\tilde{\beta}}^{1}n^{t}\log n\,dt\geqslant(1-\tilde{\beta})n^{\tilde{\beta}}\log n$$

$$\geqslant\frac{1-\tilde{\beta}}{2}n\log n,\quad \tilde{\beta}\geqslant 1-\frac{\log 2}{\log n},$$

就得到 (64) 式, 引理证毕.

至此, 完成了对 $\tilde{D}_1(n)$ 的讨论. 综合以上的 (A), (B), (C), (D) 四部份的讨论及引理 6, 我们下面来证明定理 4.

定理 4 的证明　我们将分开例外零点 $\tilde{\beta}$ 不存在和存在这二种情况来证明, 比较复杂的是后一种情形. 以下总假定 n 为偶数, $\frac{x}{2}<n\leqslant x$, 并取 $Q=x^{\eta}$, η 为一待定常数, 满足条件 (58).

(A) 例外零点 $\tilde{\beta}$ 不存在. 这时由 (47), (6), (59), (54) 及 (55) 式, 作粗略计算后可得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{4}\frac{n}{\phi(n)}x - 600\frac{n}{\phi(n)}x\left(c_{35}e^{-\frac{A_1}{2\eta}} + c_{35}^2e^{-\frac{A_1}{\eta}}\right) + O(x^{1-\eta+\varepsilon}),$$

如使所取 η 再满足条件

$$c_{35}e^{-\frac{A_1}{2\eta}} \leqslant 10^{-5}$$

即

$$\eta \leqslant \frac{A_1}{2\log(10^5c_{35})}, \tag{65}$$

则对充分大的 x 就有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{8}\frac{n}{\phi(n)}x \geqslant \frac{1}{8}x. \tag{66}$$

以后, 我们不妨假定 $c_{35} \geqslant 1$, 所以从条件 (65) 知, 总有

$$\frac{A_1}{\eta} \geqslant 20. \tag{67}$$

(B) 例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在. 首先, 使 $(n, \tilde{q}) > Q^{\frac{1}{2}}$ 的 n 的个数

$$\ll \sum_{\substack{h|\tilde{q} \\ h>Q^{\frac{1}{2}}}}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ h|n}} 1 \ll \sum_{\substack{h|\tilde{q} \\ h>Q^{\frac{1}{2}}}}\frac{x}{h} \ll xQ^{-\frac{1}{2}}d(\tilde{q}) \ll x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}. \tag{68}$$

所以, 这样的 n 可看作例外值, 而下面恒可假定 n 满足条件

$$(n, \tilde{q}) \leqslant Q^{\frac{1}{2}}. \tag{69}$$

这样, 由 (47), (59) 式得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \mathfrak{S}_1(n)n - |\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)\tilde{I}(n)| - 600\frac{n}{\phi(n)}x\left(c_{35}e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + c_{35}^2e^{-\frac{\eta_1}{\eta}}\right) + O(x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}) + O\left(\frac{n}{\phi(n)}\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}x\right). \tag{70}$$

我们再分二种情形来讨论.

(1) 存在素数 $p > 3$, 使 $p|\tilde{q}$, $p\nmid n$, 则由引理 9 知

$$|\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)| \leqslant \frac{1}{3}\mathfrak{S}_2(n).$$

由此并利用 $\tilde{\mathfrak{S}}_2(n) \geqslant \frac{1}{2}\frac{n}{\phi(n)}$, $|\tilde{I}(n)| \leqslant n$, $\eta_1 \geqslant A_1$ 及第十章引理 8，从 (70) 式即得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{6}\frac{n}{\phi(n)}x - 600\frac{n}{\phi(n)}x(c_{35}e^{-\frac{A_1}{2\eta}} + c_{35}^2 e^{-\frac{A_1}{\eta}})$$
$$+ O(x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}) + O\left(\frac{n}{\phi(n)}\frac{x}{\log Q}\right).$$

同样，当 η 再满足 (65) 式时，对充分大的 x 就有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{12}\frac{n}{\phi(n)}x \geqslant \frac{1}{12}x. \tag{71}$$

(2) 不存在素数 $p > 3$，使 $p|\tilde{q}$, $p\nmid n$. 这时由 (60) 式知

$$|\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)| = \mathfrak{S}_2(n).$$

由此及 (63) 式即得

$$\mathfrak{S}_2(n)n - |\tilde{\mathfrak{S}}_2(n)\tilde{I}(n)| \geqslant \mathfrak{S}_2(n)(n - n^{\tilde{\beta}}). \tag{72}$$

同时，在这种情形下，由第一章 § 1 性质 12，知必有

$$(n, \tilde{q}) \geqslant \frac{1}{24}\tilde{q}.$$

由此及 (69) 式，第十章引理 8 即得

$$\frac{(\log Q)^2}{(\log\log Q)^8} \ll \tilde{q} \ll Q^{\frac{1}{2}}. \tag{73}$$

当 $\tilde{\beta} < 1 - \frac{\log 2}{\log n}$ 时，和情形 (1) 一样，由 (70), (64) 式知，只要 η 再满足条件 (65)，则对充分大的 x 有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{16}\frac{n}{\phi(n)}x \geqslant \frac{1}{16}x. \tag{74}$$

当 $\tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{\log 2}{\log n}$ 时，由第十章引理 5 知

$$1 - \tilde{\beta} \geqslant \frac{c_4}{\sqrt{\tilde{q}}\,(\log\tilde{q})^4}. \tag{75}$$

由此及 (73) 式知，对充分大的 x，可使 (70) 式中的二个误差项

有

$$O\left(x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{20} \frac{n}{\phi(n)}(1-\tilde{\beta}) n \log n,$$

$$O\left(\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})} \frac{n}{\phi(n)} x\right) \leqslant \frac{1}{20} \frac{n}{\phi(n)}(1-\tilde{\beta}) n \log n.$$

由以上二式及(70),(72),(64)式知,对充分大的x有

$$\begin{aligned} |\hat{D}_1(n)| \geqslant & \frac{1}{20} \frac{n}{\phi(n)}(1-\tilde{\beta}) x \log x \\ & -600 \frac{n}{\phi(n)} x\left(c_{35} e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}}+c_{35}^2 e^{-\frac{\eta_1}{\eta}}\right). \end{aligned} \tag{76}$$

此外,由(67)式知,

$$\tilde{\beta} \geqslant 1-\frac{\log 2}{\log n} \geqslant 1-\frac{A_1}{\eta \log x}=1-\frac{A_1}{\log Q}.$$

因而,由(54),(55)及(67)式知

$$e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}}=e^{-\frac{A_1}{2\eta}}\left(\frac{(1-\tilde{\beta}) \log Q}{A_1}\right)^{\frac{A_1}{2\eta}} \leqslant e^{-\frac{A_1}{2\eta}}(1-\tilde{\beta}) \log x.$$

故当η再满足条件(65)时,由上式及(76)式可得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{40}(1-\tilde{\beta}) \frac{n}{\phi(n)} x \log x.$$

从上式及(75),(73)式即得

$$|\hat{D}_1(n)| \gg \frac{x \log x}{\sqrt{\tilde{q}}(\log \tilde{q})^4} \gg x Q^{-\frac{1}{4}}(\log x)^{-3}. \tag{77}$$

把上面所得的结果:(66),(71),(74)和(77)式及引理6合在一起,并注意到(68)式,我们就得出下面的结论:当η为满足条件(58),(65)的正数时,只要取$\Delta<\frac{1}{3}\eta$,就可使$\frac{x}{2}<n \leqslant x$中的偶数$n$除去

$$\ll x^{1-\Delta}$$

个例外值外,恒有

$$|\hat{D}_1(n)|>|\hat{D}_i(n)|.$$

定理4证毕.

由定理 4 立即推出定理 3．

§3. 小区间上的 Goldbach 数

最近，Ramachandra[95] 把 §1 的结果推广到了小区间上，本节就是要证明这一推广．设 $0<\theta<1$，我们以 $E(x,\theta)$ 表示区间 $(x, x+x^{\theta}]$ 中的非 Goldbach 数的个数．

定理 5 设 A 为任意正数，ε_1 为任意小的正数，若对 L 函数有零点密度估计[1]

$$N(\alpha, T, q) \ll (qT)^{c_1(1-\alpha)}(\log qT)^{c_2} \tag{78}$$

成立，则对任意的 θ，

$$1 \geqslant \theta > 1 - \frac{1}{c_1} + \varepsilon_1, \tag{79}$$

有

$$E(x, \theta) \ll \frac{x^{\theta}}{(\log x)^{A}}.$$

显然可以假定 x 充分大．设 $y = x^{\theta}$，且不妨假定 $y < \frac{x}{2}$．现来应用圆法．设

$$S^{(1)}(\alpha) = \sum_{x-y<p\leqslant x+y} \log p\, e(p\alpha),$$

$$S^{(2)}(\alpha) = \sum_{2<p\leqslant 2y} \log p\, e(p\alpha),$$

$$\widetilde{D}(n) = \int_0^1 S^{(1)}(\alpha) S^{(2)}(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

取 $\lambda = 3(A+8)$，$Q = (\log x)^{\lambda}$，$\tau = yQ^{-1}$．设 E_1，E_2 为第六章 §1 式(9)，(10)所确定的基本区间和余区间，则有

$$\widetilde{D}(n) = \widetilde{D}_1(n) + \widetilde{D}_2(n),$$

其中

---

1) 本节中的常数 c_1，c_2，…都按在本节中出现的先后编号．

$$\widetilde{D}_1(n) = \int_{E_1} S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha,$$

$$\widetilde{D}_2(n) = \int_{E_2} S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha. \tag{80}$$

如果能够证明

$$|\widetilde{D}_1(n)| > |\widetilde{D}_2(n)|,$$

则 n 一定是 Goldbach 数. 显然从下面的定理将立即推出定理 5.

定理 6 在定理 5 的符号和条件下，区间 $(x, x + x^\theta]$ 中的偶数 n，除了可能有

$$\ll \frac{x^\theta}{(\log x)^A}$$

个例外值外，恒有

$$|\widetilde{D}_1(n)| > |\widetilde{D}_2(n)|.$$

我们分若干引理来证明定理 6. 首先，对于余区间上的积分 $\widetilde{D}_2(n)$，同样有

引理 11 设 M 为使

$$|\widetilde{D}_2(n)| > x^\theta Q^{-\frac{1}{3}}$$

的整数 n 的个数，则

$$M \ll x^\theta Q^{-\frac{1}{3}}(\log x)^8.$$

证 和引理 1 的证明完全一样，由第六章引理 1 及第五章定理 1 推论 2(20) 式知，当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S^{(2)}(\alpha) \ll x^\theta Q^{-\frac{1}{2}}(\log x)^3.$$

因而就有

$$\sum_n |\widetilde{D}_2(n)|^2 = \int_{E_2} |S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha)|^2 d\alpha \ll x^{3\theta}Q^{-1}(\log x)^8,$$

$$Mx^{2\theta}Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^{3\theta}Q^{-1}(\log x)^8.$$

这就证明了引理.

下面讨论基本区间上的积分 $\widetilde{D}_1(n)$，这是主要的. 为此需要应用第五章引理 11 和第十章引理 11. 由第五章引理 11 容易推出

引理 12 在第五章引理 11 的符号下，对 $q \leqslant x$，$T \leqslant x^{\frac{1}{2}}$，$(q, l) = 1$，我们有

$$\psi(x; q, l) = \frac{x}{\phi(q)} - \widetilde{E}\,\frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)}\,\frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}$$

$$-\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi_q} \chi(l) \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}}{}' \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

这里 $\tilde{\chi}$, $\tilde{\beta}$ 是对应于模 q 的可能存在的例外特征和例外零点.

利用第十章引理 11，我们证明

引理 13 设 A_1 为任意正数，$q \leqslant (\log x)^{A_1}$. 若估计式 (78) 成立，则对任意小的正数 ε_2, 当 $T \ll x^{\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2}$ 时，有

$$\sum_{\chi_q} \sum_{\rho}{}' x^{\beta-1} \ll e^{-c_3 (\log x)^{\frac{1}{5}}},$$

其中 c_1 为 (78) 式中的常数，$\sum\limits_{\rho}{}'$ 表示对 $L(s, \chi_q)$ 除去可能存在的例外零点 $\tilde{\beta}$ 外的所有非显明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ 求和.

证 由条件 $q \leqslant (\log x)^{A_1}$ 及第十章引理 11 知，对所有的 $L(s, \chi)$, $\chi \bmod q$, 除去可能存在的例外零点 $\tilde{\beta}$ 外，在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_4}{(\log x)^{4/5}}, \quad |t| \leqslant x$$

中无零点. 所以由 (78) 式及条件 $T \ll x^{\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2}$ 可得

$$\sum_{\chi_q} \sum_{\rho}{}' x^{\beta-1} = -\int_0^{1-c_4/(\log x)^{4/5}} x^{\alpha-1} d_\alpha N(\alpha; T, q)$$

$$\ll x^{-1} qT \log(qT) + \log x \int_0^{1-c_4/(\log x)^{4/5}} x^{\alpha-1} N(\alpha; T, q) d\alpha$$

$$\ll x^{-1+\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2} (\log x)^{c_5} + (\log x)^{c_6} \int_0^{1-c_4/(\log x)^{4/5}} x^{-\varepsilon_2 c_1 (1-\alpha)} d\alpha$$

$$\ll x^{-1+\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2} (\log x)^{c_5} + (\log x)^{c_6} x^{-\varepsilon_2 c_1 c_4/(\log x)^{4/5}}.$$

再注意到总有

$$c_1 \geqslant 2,$$

这就证明了引理.

引理 14 设 $\alpha \in I(q, h) \subset E_1$, $\alpha = \frac{h}{q} + z$, $|z| \leqslant \frac{1}{\tau}$, $q \leqslant Q$, 我们有

$$S^{(1)}(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\frac{\sin 2\pi zy}{\sin \pi z}e(zx)+O(ye^{-c_7(\log x)^{1/5}}). \qquad (81)$$

证　我们有

$$S^{(1)}(\alpha)=\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q}l\right)\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x+y\\ n\equiv l(q)}}\Lambda(n)e(nz)$$

$$+O(x^{\frac{1}{2}}\log x). \qquad (82)$$

注意到 $x-y>\frac{x}{2}$，利用引理 12 可得

$$\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x+y\\ n\equiv l(q)}}\Lambda(n)e(nz)=\int_{x-y}^{x+y}e(tz)d_t\psi(t;q,l)$$

$$=\int_{x-y}^{x+y}e(tz)\left(\frac{1}{\phi(q)}-\tilde{E}\frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)}t^{\tilde{\beta}-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(l)\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\leqslant T}}{}' t^{\rho-1}\right)dt$$

$$+\int_{x-y}^{x+y}e(tz)d\gamma(t), \qquad (83)$$

其中

$$\gamma(t)\ll\frac{t(\log x)^2}{T},\quad x-y\leqslant t\leqslant x+y,$$

以及取 $T=x^{1-\theta+\frac{\varepsilon_1}{2}}$，$\frac{\varepsilon_1}{2}<1-\theta+\frac{\varepsilon_1}{2}<\frac{1}{c_1}-\frac{\varepsilon_1}{2}$．由 Siegel 定理，即第十章引理 9 $\left(\text{取 } \varepsilon=\frac{4}{5\lambda}\right)$，可得

$$t^{\tilde{\beta}-1}\ll e^{-c_8(\log x)^{1/5}},\quad x-y\leqslant t\leqslant x+y,\quad q\leqslant Q.$$

所以

$$\int_{x-y}^{x+y}\frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)}t^{\tilde{\beta}-1}dt\ll ye^{-c_8(\log x)^{1/5}}. \qquad (84)$$

利用引理 13，我们有

$$\int_{x-y}^{x+y}e(tz)\sum_{\chi_q}\chi(l)\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\leqslant T}}{}' t^{\rho-1}dt\ll\int_{x-y}^{x+y}\sum_{\chi_q}\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\leqslant T}}{}' t^{\beta-1}dt$$

$$\ll ye^{-c_9(\log x)^{1/5}},$$

我们还有

$$\int_{x-y}^{x+y} e(tz)d\gamma(t) \ll \frac{x(\log x)^2}{T} + \int_{x-y}^{x+y} |z||\gamma(t)|dt$$

$$\ll \frac{x(\log x)^2}{T}Q = x^{\theta-\frac{\varepsilon_1}{2}}(\log x)^2 Q \ll ye^{-c_9(\log x)^{1/5}}. \quad (85)$$

综合(82)—(85)即得

$$S^{(1)}(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\frac{\sin 2\pi zy}{\pi z}e(zx) + O(ye^{-c_{10}(\log x)^{1/5}}).$$

由此并利用

$$\frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\sin \pi t} + O(|t|), \quad |t| < \frac{1}{2},$$

即得(81)式,引理证毕.

不难看出,上面的引理对 $x - y \leqslant \frac{x}{2}$, 即 $y \geqslant \frac{x}{2}$ 亦成立. 事实上,这时证明更简单. 用第六章引理 2 (17) 式代替这里所用的引理 13 可得(如同证明第六章引理 3 一样)

$$S^{(2)}(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)}\frac{\sin 2\pi zy}{\sin \pi z}e(zy) + O(ye^{-c_7(\log x)^{1/5}}). \quad (86)$$

我们还需要下面的引理:

引理 15 设 K 为正整数,则

$$\left(\frac{\sin 2\pi Kz}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1}(2K - |k|)e(zk).$$

证 我们有

$$\left(\frac{\sin 2\pi Kz}{\sin \pi z}\right)^2 = e(-(2K-1)z)\left(\frac{e(2Kz)-1}{e(z)-1}\right)^2$$

$$= e(-(2K-1)z)\left(\sum_{k=0}^{2K-1} e(Kz)\right)^2$$

$$= e(-(2K-1)z)\left(\sum_{k=0}^{2K-1}(k+1)e(kz)\right.$$

$$\left. + \sum_{k=2K}^{2(2K-1)}(4K-(k+1))e(kz)\right)$$

$$= \sum_{k=-(2K-1)}^{0} (2K+k)e(kz)$$

$$+ \sum_{k=1}^{2K-1} (2K-k)e(kz),$$

证毕.

引理 16 设 $1 \geqslant \theta > 1 - \frac{1}{c_1} + \varepsilon_1$, $x \leqslant n \leqslant x + x^\theta$, 则有

$$\widetilde{D}_1(n) = \mathfrak{S}_2(n)T(n) + O(d(n)x^\theta Q^{-1}\log x), \qquad (87)$$

其中 $\mathfrak{S}_2(n)$ 由 §1 引理 4 所确定, $T(n)$ 满足

$$x^\theta \leqslant T(n) \leqslant 2x^\theta - 1. \qquad (88)$$

证 由 (81), (86) 式可得, 当 $\alpha \in E_1$ 时

$$S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha) = \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}\left(\frac{\sin 2\pi z y}{\sin \pi z}\right)^2 e(z(x+y))$$
$$+ O(y^2 e^{-c_7(\log x)^{1/3}}),$$

这里的 α 在引理 14 中给出. 由于 $|z| \leqslant \frac{1}{\tau} = y^{-1}Q$, 所以若设 $N = [x]$, $U = [y] = [x^\theta]$, 就有

$$\widetilde{D}_1(n) = \int_{E_1} S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$
$$= \sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)$$
$$\times \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{\sin 2\pi z U}{\sin \pi z}\right)^2 e((N-U-n)z)dz$$
$$+ O(ye^{-c_{11}(\log x)^{1/3}}).$$

由于

$$\int_{\pm\frac{1}{\tau}}^{\pm\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin 2\pi z U}{\sin \pi z}\right)^2 dz \ll \tau,$$

由以上二式及引理 2 即得

$$\widetilde{D}_1(n) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)$$

$$\times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin 2\pi z U}{\sin \pi z}\right)^2 e((N+U-n)z)dz$$
$$+ O(yQ^{-1}\log\log x).$$

由引理 15 可得

$$T(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin 2\pi z U}{\sin 2\pi z}\right)^2 e((N+U-n)z)dz$$
$$= 2U - |N+U-n|.$$

从以上二式及引理 3 即得(87)式,由于 $N \leqslant n \leqslant N+U+1$,所以

$$-1 \leqslant N+U-n \leqslant U$$

故 $T(n)$ 满足 (88) 式,证毕.

定理 6 的证明 由第五章引理 8 推论 3 容易推得,在 $x \leqslant n \leqslant x + x^\theta$ 中使

$$d(n) \geqslant Q^{\frac{1}{2}}$$

的 n 的个数

$$\ll x^\theta Q^{-\frac{1}{2}} \log x.$$

故由此及 (87) 式知,可能除了 $\ll x^\theta Q^{-\frac{1}{2}} \log x$ 个例外值 n 外,恒有

$$\widetilde{D}_1(n) = \mathfrak{S}_2(n)T(n) + O(x^\theta Q^{-\frac{1}{2}} \log x).$$

这样,由此及引理 11,并利用 (6),(88) 式及 $Q = (\log x)^\lambda$,$\lambda = 3(A+8)$ 即知:在 $x \leqslant n \leqslant x + x^\theta$ 中的偶数 n,仅可能除了

$$\ll \frac{x^\theta}{(\log x)^A}$$

个例外值外,恒有

$$|\widetilde{D}_1(n)| > |\widetilde{D}_2(n)|,$$

这就证明了定理 6.

由定理 6 立可推得定理 5.

第十二章　Goldbach 数（二）

1951 年，Ю. В. Линник[77] 首先研究了如下的问题：找一个函数 $f(x)$，使对充分大的 x，区间 $[x, x+f(x)]$ 中必有 Goldbach 数存在。这实际上就是估计相邻 Goldbach 数之差。显然，若能证明 $f(x)\equiv 2$，则也就解决了关于偶数的 Goldbach 猜想。Линник在 RH 下证明了可取

$$f(x)=(\log x)^{3+\varepsilon},$$

这里 ε 为任意小的正数，并在 ζ 函数零点密度假设下也得到了一个结果。潘承洞[14]实际上证明了：当 ζ 函数的零点密度估计

$$N(\alpha, T)\ll T^{c_1(1-\alpha)}(\log T)^{c_2},\ \frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad T\geqslant 2 \tag{1}$$

成立时，可取

$$f(x)=x^{1-\frac{2}{c_1}+\varepsilon},$$

ε 为任意小的正数。最近，王元[145]和 Prachar[93] 分别在 ζ 函数零点密度假设下得到了一些结果，王元的结果较强，他证明了：(a) 如果

$$N(\alpha, T)\ll T^{2(1-\alpha)}\log T,\quad \frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad T\geqslant 2,$$

成立，则可取

$$f(x)=(\log x)^{\frac{148}{3}+\varepsilon},$$

ε 为任意小正数；(b) 如果更强的估计(比 RH 要弱)

$$N(\alpha, T)\ll T^{2(1-\alpha)}(\log T)^{-\frac{72}{37}},\quad \frac{1}{2}<\alpha<1,\quad T\geqslant 2,$$

成立，则可取

$$f(x)=(\log x)^{3+\varepsilon},$$

ε 为任意小的正数。

Линник 的方法实质上是圆法,以上结果都是用 Линник 方法得到的. 研究这一问题的另一方法是利用 Selberg 不等式(见引理 5, 6, 7, 8), 这要比 Линник 方法简单, 且得到了更好的结果. Kátai[61] 指出: 当 RH 成立时,可取

$$f(x)=c_3(\log x)^2. \tag{2}$$

Montgomery 和 Vaughan[83] 证明了: 若估计式 (1) 成立, 则可取

$$f(x)=x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)+\varepsilon},$$

这里 ε 为任意小的正数. 最近, Ramachadra[96] 得到了相应于这一结果的小区间中的 Goldbach 数的个数的一个下界估计.

在这一章里,我们将利用 Selberg 不等式证明

定理 1 若 (a) ζ 函数零点密度估计 (1) 成立; (b) 存在正数 α_0, $\frac{1}{2}<\alpha_0<1$ 及正数 $c_4>0$, 使 ζ 函数零点密度估计

$$N(\alpha, T)\ll T^{(2-c_4)(1-\alpha)}(\log T)^{c_5},\quad \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad T>2 \tag{3}$$

成立, 则对所有的 $x\geqslant 2$, 区间 $[x, x+f(x)]$ 中必有 Goldbach 数,这里

$$f(x)=c_6x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)}(\log x)^{c_7}.$$

以及证明在 RH 下得到的结果 (2), 即

定理 2 若 RH 成立,则对所有的 $x\geqslant 2$, 区间 $[x, x+f(x)]$ 中必有 Goldbach 数,这里 $f(x)$ 由 (2) 给出.

§1. 一些引理

引理 1 $\zeta(s)$ 在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_8}{(\log(|t|+10))^{2/3}\log\log(|t|+10)}$$

中没有零点.

证明见 [136], [60].

引理 2 设 $2\leqslant T\ll x\log x$, 则有

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=x-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\rho}}{\rho}+O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

这里 $\rho=\beta+i\gamma$ 为 $\zeta(s)$ 的非显明零点。

证明见 [24], [92].

引理 3 若 ζ 函数零点密度估计 (1) 及 (3) 均成立，则对任意正数 A，当 $x\gg h\gg x^{1-\frac{1}{c_1}}\log^{c_9}x$ 时，有

$$\psi(x+h)-\psi(x)=h+O\left(\frac{h}{\log^A x}\right),$$

这里

$$c_9=\frac{c_{10}}{c_1}+A+2,\quad C_{10}=\frac{c_2+A+1}{1-\alpha_0}.$$

证 由引理 2 知，当 $2\leqslant T\leqslant x$ 时，

$$\psi(x+h)-\psi(x)=h-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\left(\frac{(x+h)^{\rho}}{\rho}-\frac{x^{\rho}}{\rho}\right)+O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right).\tag{4}$$

我们有

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\left(\frac{(x+h)^{\rho}}{\rho}-\frac{x^{\rho}}{\rho}\right)=\sum_{|\gamma|\leqslant T}\int_x^{x+h}u^{\rho-1}du\ll h\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta-1}.\tag{5}$$

利用引理 1，密度估计 (1), (3) 及 $N(0,T)\ll T\log T$，可得

$$\begin{aligned}\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta-1}&\ll x^{-1/2}T\log T-\int_{1/2}^{1}x^{\alpha-1}dN(\alpha,T)\\&\ll x^{-1/2}T\log T+\log x\int_{1/2}^{\alpha_0}x^{\alpha-1}T^{c_1(1-\alpha)}\log^{c_2}T\,d\alpha\\&\quad+\log x\int_{\alpha_0}^{1-\sigma(T)}x^{\alpha-1}T^{(2-c_4)(1-\alpha)}\log^{c_5}T\,d\alpha\\&\ll(\log x)^{c_2+1}\left[\left(\frac{T^{c_1}}{x}\right)^{1/2}+\left(\frac{T^{c_1}}{x}\right)^{1-\alpha_0}\right]\\&\quad+(\log x)^{c_5+1}\left[\left(\frac{T^{2-c_4}}{x}\right)^{1-\alpha_0}+\left(\frac{T^{2-c_4}}{x}\right)^{\sigma(T)}\right],\end{aligned}$$

这里

$$\sigma(T)=\frac{c_8}{(\log(T+10))^{2/3}\log\log(T+10)}.$$

现取 $T^{c_1}=x(\log x)^{-c_{10}}$，由上式即得

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta-1}\ll(\log x)^{c_2+1-c_{10}(1-\alpha_0)}=(\log x)^{-A}. \tag{6}$$

此外我们还有

$$\frac{x\log^2 x}{T}=x^{1-\frac{1}{c_1}}(\log x)^{\frac{c_{10}}{c_1}+2}. \tag{7}$$

综合以上 (4)—(7)式就证明了引理.

根据第四章定理 1 所得到的结果，当取

$$c_1=3,\quad c_2=9$$

时，估计式 (1) 成立. 根据第四章定理 4 知，当取

$$\alpha_0=\frac{12}{13},\quad c_4=\frac{1}{33},\quad c_5=16$$

时，估计式 (3) 成立. 这样我们就可定出 c_9，并取

$$1-\frac{1}{c_1}=\frac{2}{3},$$

即

$$h\gg x^{2/3}(\log x)^{c_9}$$

时引理 3 成立. 如利用 Montgomery[82] 的结果，则可取 $c_1=\frac{5}{2}$，而利用 Huxley[52] 的结果，则可取 $c_1=\frac{12}{5}$. 这样，相应地当

$$h\gg x^{3/5}(\log x)^{c_9},\quad h\gg x^{7/12}(\log x)^{c_9}$$

时引理 3 成立. 这里对数方次 c_9 是次要的.

利用熟知的方法，易从引理 3 推出

引理 4 在引理 3 的符号和条件下，我们有

$$\vartheta(x+h)-\vartheta(x)=h+O\left(\frac{h}{(\log x)^A}\right), \tag{8}$$

及

$$\pi(x+h)-\pi(x)=\int_x^{x+h}\frac{dt}{\log t}+O\left(\frac{h}{(\log x)^{A+1}}\right). \tag{9}$$

引理5 若 RH 成立，则当 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 时，有

$$I(\psi) = \int_x^{2x} [\psi(y + \theta y) - \psi(y) - \theta y]^2 dy$$

$$\ll \theta x^2 \min(\log^2 x, \log^2(2 + \theta^{-1})).$$

证 显然有

$$I(\psi) \leqslant \int_1^2 d\lambda \int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x} [\psi(y + \theta y) - \psi(y) - \theta y]^2 dy. \tag{10}$$

由引理2可得

$$\int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x} [\psi(y + \theta y) - \psi(y) - \theta y]^2 dy$$

$$\ll \int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x} \left| \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{(1 + \theta)^\rho - 1}{\rho} y^\rho \right|^2 dy + O\left(\frac{x^3 \log^4 x}{T}\right). \tag{11}$$

进而有

$$\int_1^2 d\lambda \int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x} \left| \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{(1 + \theta)^\rho - 1}{\rho} y^\rho \right|^2 dy = \int_1^2 \Bigg[\sum_{|\gamma_1| \leqslant T} \sum_{|\gamma_2| \leqslant T}$$

$$\times \frac{(1 + \theta)^{\rho_1} - 1}{\rho_1} \frac{(1 + \theta)^{\bar{\rho}_2} - 1}{\bar{\rho}_2} \frac{y^{1 + \rho_1 + \bar{\rho}_2}}{1 + \rho_1 + \bar{\rho}_2} \Bigg|_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x} \Bigg] d\lambda$$

$$= \sum_{|\gamma_1| \leqslant T} \sum_{|\gamma_2| \leqslant T} \frac{(1 + \theta)^{\rho_1} - 1}{\rho_1} \frac{(1 + \theta)^{\bar{\rho}_2} - 1}{\bar{\rho}_2}$$

$$\times \frac{2^{1 + \rho_1 + \bar{\rho}_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1 + \rho_1 + \bar{\rho}_2}}{1 + \rho_1 + \bar{\rho}_2} \frac{2^{2 + \rho_1 + \bar{\rho}_2} - 1}{2 + \rho_1 + \bar{\rho}_2} x^{1 + \rho_1 + \bar{\rho}_2}$$

$$\ll \sum_{|\gamma_1| \leqslant T} \sum_{|\gamma_2| \leqslant T} \min(\theta, |\gamma_1|^{-1})$$

$$\times \min(\theta, |\gamma_2|^{-1}) \frac{x^{1 + \beta_1 + \beta_2}}{(1 + |\gamma_1 - \gamma_2|)^2}, \tag{12}$$

这里最后一步用到了

$$\frac{(1 + \theta)^\rho - 1}{\rho} = \int_1^{1 + \theta} t^{\rho - 1} dt \ll \min(\theta, |\gamma|^{-1}).$$

利用 $|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$，由 (10)，(11)，(12) 式即得

$$I \ll \frac{x^3 \log^4 x}{T^2} + I_1, \tag{13}$$

这里

$$I_1 = \sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\min(\theta^2, |\gamma_1|^{-2})\frac{x^{1+2\beta_1}}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2}. \tag{14}$$

利用熟知估计

$$N(0, T+1) - N(0, T) \ll \log T, \ (T \geqslant 2), \tag{15}$$

可得

$$\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{1}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k\leqslant|\gamma_1-\gamma_2|<k+1}\frac{1}{(1+k)^2}$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log(k+2+|\gamma_1|)}{(1+k)^2} \ll \log(2+|\gamma_1|). \tag{16}$$

由 (14), (15) 式推得

$$I_1 \ll \sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\min(\theta^2, |\gamma_1|^{-2})x^{1+2\beta_1}\log(2+|\gamma_1|). \tag{17}$$

而当 RH 成立时，对任意的 T 有(利用 (15))

$$I_1 \ll x^2\sum_{|\gamma_1|<\theta^{-1}}\theta^2\log(2+\theta^{-1}) + x^2\sum_{|\gamma_1|>\theta^{-1}}\frac{\log(2+|\gamma_1|)}{|\gamma_1|^2}$$

$$\ll \theta x^2\log^2(2+\theta^{-1}). \tag{18}$$

现取 $T = x\log x$, 由 (13), (18) 式得

$$I \ll \theta x^2\log^2(2+\theta^{-1}) + x\log^2 x.$$

由于对充分小的 $\theta > 0$, $\theta\log^2(2+\theta^{-1})$ 是 θ 的增函数，所以，对充分大的 x, 当 $\theta \geqslant \frac{1}{x}$ 时，从上式可得

$$I \ll \theta x^2\log^2(2+\theta^{-1}), \quad \theta \geqslant \frac{1}{x}. \tag{19}$$

这就证明了引理当 $\theta \geqslant \frac{1}{x}$ 时成立. 下面来证明 $0 \leqslant \theta < \frac{1}{x}$ 的情形. 当 $x \leqslant y \leqslant 2x$ 时，我们有

$$\psi(y+\theta y) - \psi(y) = \sum_{\substack{y<p^m\leqslant y+\theta y\\ m\geqslant 1}}\log p$$

$$\ll \log x\sum_{m\leqslant 2\log x}\frac{1}{m}\sum_{y<p^m\leqslant y+\theta y}1,$$

所以

$$I(\phi) \ll \log^2 x \int_x^{2x} \Big(\sum_{m \leqslant 2\log x} \frac{1}{m} \sum_{y < p^m \leqslant y+\theta y} 1 \Big)^2 dy + \theta^2 x^3$$

$$\ll \log^2 x \sum_{m \leqslant 2\log x} \int_x^{2x} \Big(\sum_{y < p^m \leqslant y+\theta y} 1 \Big)^2 dy + \theta^2 x^3. \tag{20}$$

设 q 为素数，则对固定的 m 有

$$\int_x^{2x} \Big(\sum_{y < p^m \leqslant y+\theta y} 1 \Big)^2 dy \leqslant \sum_{x-2\theta x \leqslant q^m \leqslant 2x+2\theta x} \int_{q^m-2\theta x}^{q^m+2\theta x} \Big(\sum_{y < p^m \leqslant y+\theta y} 1 \Big)^2 dy$$

$$\ll \frac{x^{\frac{1}{m}}}{\log x^{\frac{1}{m}}} \theta x(1+\theta^2 x^2). \tag{21}$$

由以上二式即得

$$I(\phi) \ll \theta x(1+\theta^2 x^2)\log x \sum_{m \leqslant 2\log x} m x^{\frac{1}{m}} + \theta^2 x^3$$

$$\ll \theta x^2(1+\theta^2 x^2)\log x + \theta^2 x^3. \tag{22}$$

故当 $0 \leqslant \theta \leqslant x^{-1}\log^{\frac{1}{2}} x$ 时，由 (22) 式推得

$$I(\phi) \ll \theta x^2 \log^2 x.$$

这显然包含了我们所要证明的情形，引理证毕。

引理 6 若 ζ 函数零点密度估计 (1) 及 (3) 均成立，则对任意正数 A，当 $1 \geqslant \theta \geqslant x^{-\frac{2}{c_1}}(\log x)^{c_{11}}$ 时，有

$$I(\phi) = \int_x^{2x} [\phi(y+\theta y) - \phi(y) - \theta y]^2 dy \ll \frac{\theta^2 x^3}{(\log x)^A},$$

这里

$$c_{11} = \frac{c_{12}}{c_1} + \frac{A+4}{2}, \quad c_{12} = \frac{c_2 + A + 2}{1-\alpha_0}.$$

证　引理 5 证明中的推导从(10)—(17)式并未用到条件 RH 成立，所以这些结果在这里亦成立。现取 $T^{c_1} = x^2(\log x)^{-c_{12}}$，由 (17) 式得

$$I_1 \ll \theta^2 x^3 \log x \sum_{|\gamma_1| \leqslant T} (x^2)^{\beta_1 - 1}.$$

由此及引理 3 中的 (6) 式就容易推得

$$I_1 \ll \theta^2 x^3 (\log x)^{-A}.$$

从上式及 (13) 式就得到所要的结果，证毕。

引理 7 若 RH 成立，则当 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 时，有

$$I(\vartheta) = \int_x^{2x} [\vartheta(y + \theta y) - \vartheta(y) - \theta y]^2 dy \ll \theta x^2 \log^2 x.$$

证 显然，引理 5 证明的后半部分的结果在这里亦成立(相当于仅有 $m=1$ 这一项)。所以当 $0 \leqslant \theta \leqslant x^{-1}(\log x)^{1/2}$ 时，引理成立。

当 $x \leqslant y \leqslant 2x$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&(\psi(y+\theta y) - \psi(y)) - (\vartheta(y+\theta y) - \vartheta(y)) \\
&= \sum_{\substack{y < p^m \leqslant y+\theta y \\ m \geqslant 2}} \log p \ll \sum_{2 \leqslant m \leqslant 2\log x} \frac{\log x}{m} \sum_{y^{\frac{1}{m}} < p \leqslant \left(1+\frac{\theta}{m}\right) y^{\frac{1}{m}}} 1 \\
&\leqslant \sum_{2 \leqslant m \leqslant 2\log x} \frac{\log x}{m} \left(1 + \frac{\theta}{m} y^{\frac{1}{m}}\right) \\
&\ll (\log x) \log\log x + \theta x^{\frac{1}{2}} \log x,
\end{aligned} \tag{23}$$

由此即得

$$I(\vartheta) \ll I(\psi) + x(\log x)^2 (\log\log x)^2 + \theta^2 x^2 \log^2 x. \tag{24}$$

故当 $1 \geqslant \theta \geqslant x^{-1}(\log x)^{\frac{1}{2}}$ 时，由上式及引理 5 知引理亦成立，证毕。

引理 8 在引理 6 的符号和条件下，我们有

$$I(\vartheta) \ll \frac{\theta^2 x^3}{(\log x)^A}.$$

证 引理 7 证明中的 (24) 式在这里仍成立，由引理 6，(24) 式及 θ 所满足的条件就推得本引理成立，证毕。

附注 引理 6 可以不用引理 5 的证明方法，而更简单的加以直接证明。引理 7 也可以得到

$$I(\vartheta) \ll \theta^2 x^2 \min(\log^2 x, \log^2(1 + \theta^{-1}))$$

这样的估计，但证明要复杂些，这里也用不着这样的结果。

§2. 定理的证明

定理 1 的证明 设 x 为充分大的正数，若 $[x, x+h]$ 中没有

Goldbach 数，我们取

$$y = x^{1-\frac{1}{c_1}}(\log x)^{c_9},$$

由引理 4 知，$\left[x-y, x-\frac{y}{2}\right]$ 中必有

$$\gg \frac{y}{\log x}$$

个素数，由假设知，对任一奇素数 $p \in \left[x-y, x-\frac{y}{2}\right]$，区间

$$[x-p, x-p+h]$$

中必无奇素数，且当 $p \in \left[x-y, x-\frac{y}{2}\right]$ 时有[1]

$$\frac{y}{2} \leqslant x-p \leqslant y.$$

这样，当 $y \in \left[x-p, x-p+\frac{h}{2}\right]$ 时，区间 $\left[y, y+\frac{h}{2}\right]$ 中亦必无素数. 现取 $\theta = \frac{1}{4}hy^{-1}$，我们就有

$$\int_{\frac{y}{4}}^{2y} [\vartheta(t+\theta t) - \vartheta(t) - \theta t]^2 \, dt \geqslant \sum_{\frac{1}{2}y \leqslant x-p \leqslant y}$$

$$\times \int_{x-p}^{x-p+1} \left[\sum_{t<p\leqslant t+\theta t} \log p - \theta t\right]^2 dt \gg \theta^2 y^3 (\log y)^{-1}.$$

由此及引理 8 (取 $A=2$) 知，必有

$$\theta \ll y^{-\frac{2}{c_1}}(\log y)^{c_{11}},$$

即

$$h \ll y^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)}(\log y)^{c_{11}}.$$

注意到所取的 y，这就证明了定理 1.

和对引理 3 中的常数讨论一样，我们知道，取适当的常数可使估计式 (1) 及 (3) 成立，因而可定出函数

---

1) 只要 x 充分大，一定可使 $x-y \geqslant 3$，$\frac{y}{2} \geqslant 3$.

$$f(x) = c_6 x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)}(\log x)^{c_7}$$

中的常数，而其主要常数——即 x 的方次

$$\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)$$

完全由 c_1 所确定．当 c_1 分别取 3，5/2，12/5 时，这里的方次可相应的取为

$$\frac{2}{9}, \frac{3}{25}, \frac{7}{72}.$$

定理 2 的证明 设 x 充分大，若区间 $[x, x+h]$ 中没有 Goldbach 数，则对每一个 $y \leqslant x$，在区间 $\left[y, y+\frac{h}{2}\right]$ 及 $\left[x-y, x-y+\frac{h}{2}\right]$ 中不能同时存在奇素数．现考虑这样一组区间

$$\left[y_k, y_k+\frac{h}{2}\right], \quad y_k = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}kh,$$
$$-\frac{1}{2}xh^{-1} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}xh^{-1}. \tag{25}$$

同时相应地考虑

$$\left[x-y_k, x-y_k+\frac{h}{2}\right], \quad y_k = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}kh,$$
$$-\frac{1}{2}xh^{-1} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}xh^{-1}. \tag{26}$$

把这两组区间写为

$$\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}kh, \frac{1}{2}x + \frac{h}{2}(k+1)\right],$$
$$-\frac{1}{2}xh^{-1} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}xh^{-1}, \tag{27}$$

及

$$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}kh, \frac{1}{2}x - \frac{h}{2}(k-1)\right],$$
$$-\frac{1}{2}xh^{-1} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}xh^{-1}, \tag{28}$$

就不难看出，它们只是同一组区间按相反的次序排列．由于对应同一个 k 的二个区间不能同时存在奇素数，所以这一组区间中至少有一半区间其中不存在奇素数．而区间组（25）的区间个数 $\geqslant [xh^{-1}]$，所以其中至少有 $\frac{1}{3}xh^{-1}$ 个区间不包含奇素数．现取 $\theta = \frac{1}{4}x^{-1}h$，由于

$$3 \leqslant \frac{1}{4}x \leqslant y_k \leqslant \frac{3}{4}x \quad -\frac{1}{2}xh^{-1} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}xh^{-1},$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{x}{4}}^{x} [\vartheta(y+\theta y) - \vartheta(y) - \theta y]^2 dy \\
&= \int_{\frac{x}{4}}^{x} \Big[\sum_{y<p\leqslant y+\theta y} \log p - \theta y\Big]^2 dy \\
&\geqslant \sum_k{}' \int_{y_k}^{y_k+\frac{h}{4}} \Big[\sum_{y<p\leqslant y+\theta y} \log p - \theta y\Big]^2 dy \\
&\gg xh^{-1}\theta^2 x^2 h \gg xh^2.
\end{aligned}$$

这里 $\sum\limits_k{}'$ 表示对这样一些 k 求和，对应这些 k，区间 $\left[y_k, y_k + \frac{h}{2}\right]$ 中不包含素数．由此及引理 7 即得

$$h \ll \log^2 x,$$

这就证明了定理 2．

参 考 文 献

[1] Барбан, М. Б., Новые применения «большого Решета» Ю. В. Линник, *Теория Вероят. и Мат. Стат., Ташкент*, **22**(1961),1—20.

[2] ——————, Плотность нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и «почти простых» чисел, *Мат. сб.*, **61** (1963), 418—425.

[3] ——————, Метод «большого решета» и его Применения в теория чисел, *УМН СССР*, **21**(1966), 51—102.

[4] Bombieri, E., On the large sieve, *Mathematika*, **12** (1965), 201—225.

[5] ——————, Davenport, H., Small difference between prime numbers, *Proc. Roy, Soc. Ser. A*, **293** (1966), 1—18.

[6] Бороздкий, К. Г., К вопросу о постоянной И. М. Виноградов, Тру. Тре. Всесоюзного Мат. Съезда СССР, **1**(1956), 3.

[7] de Bruijn, N.G., On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes, *Indag. Math.*, **12** (1950), 247—256.

[8] ——————, The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*), **15** (1951), 25—32.

[9] Brun, V., Le cribe d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, *Skr. Norske Vid.-Akad. Kristiania*, **I** (1920), No. 3.

[10] Бухштаб, А. А., Асимптотическая оценка одной общей теоретичисловой функции, *Мат. сб.*, **2** (1937), 1239—1246.

[11] ——————, Новые улучшения в Методе Эратосфенова решета, *Мат. сб.*, **4**(1938), 375—387.

[12] ——————, О разложении четных чисел на сумму двух слагаемых с ограниченным числом простых множителей, *ДАН СССР*, **29** (1940), 544—548.

[13] ——————, Об одном аддитивном представлении целых чисел, *Мат. сб.*, **10**(1942), 87—91.

[14] ——————, О числах арифметической прогрессии у которых все простых множители малы по порядку роста, *ДАН СССР*, **67** (1949), 5—8.

[15] ——————, Об асимптотической оценке числа чисел арифметической прогрессии, не делящихся на «относительно» малые простые числа, *Мат. сб.*, **28** (1951), 165—184.

[16] ——————, Новые результаты в исследавании проблеммы Гольдбаха-Эилера и простых чисел близнецов, *ДАН СССd*' **162**(1965), 735—738.

[17] 陈景润, On large odd number as sum of three almost equal primes, *Sci. Sin.*, **14** (1965), 1113—1117.

[18] ——————,大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和,科学

通报,17(1966),385—386.
[19] ————, On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sin.*, **16** (1973), 157—176; II, *Sci. Sin.*, **21** (1978), 421—430.
[20] ————, On the Goldbach's problem and the sieve methods, *Sci. Sin.*, **21** (1978), 701—739.
[21] 陈景润,潘承洞,哥特巴赫数的例外集合,山东大学学报(自然科学版),1979, 1,1—27.
[22] Chowla, S., Vijagaraghaven, T., On the largest prime divisor of numbers, *J. Indian Math. Soc.*, 11 (1947), 31—37.
[23] Corput, J. G. van der, Sur l'hypothese de Goldbach pour presque tous les nombres pairs, *Acta Arith.*, **2** (1937), 266—290.
[24] Davenport, H., Multiplicative Number Theory, Markham, 1967.
[25] ————, Halberstam, H., The values of a trigonometric polynomial at well spaced points, *Mathematika*, 13 (1966), 91—96; Corrigendum and addendum, *Mathematika*, 14 (1967), 229—232.
[26] Estermann, T., Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode, *J. Reine Angew. Math.*, **168** (1932), 106—116.
[27] ————, A new result in the additive prime-number theory, *Quart, J. Math., Oxford*, 8 (1937), 32—38.
[28] ————, Proof that almost all even positive integers are sum of two primes, *Proc. London Math. Soc.* (*1*), 44 (1938), 307—314.
[29] ————, Introduction to Modern Prime Number Theory, Cambridge tracts, **41**, Cambridge, 1961.
[30] Fogel, E., On the zeros of L-function, *Acta. Arith.*, 11 (1965), 67—96.
[31] Fouvry, É., Un resultat nouveau en theórie additive des nombres premiers, Séminaire de Theórie des Nombres, 1975—1976 (Univ. Bordeaux I, Talence), Exp. No. 7, 11pp.
[32] Fujii, A., Some remarks on Goldbach's problem *Acta. Arith.*, **32** (1977), 27—35.
[33] Gallagher, P.X., The large sieve, *Mathematika*, 14 (1967), 14—20.
[34] ————, Bombieri's mean value theorem, *Mathematika*, **15** (1968), 1—6.
[35] ————, A large sieve, density estimate near $\sigma=1$, *Invent. Math.*, 11 (1970), 329—339.
[36] ————, Local mean value and density estimate for Dirichlet L-function, *Indag. Math.*, **37** (1975), 259—264.
[37] Halbertam, H., Roth, K. F., Sequences I, Oxford, 1966.
[38] Halberstam, H., Richert, H. E., Sieve Methods, Academic Press, 1974.
[39] Halberstam, H., A proof of Chen's theorem, *Asterisque*, **24—25** (1975), 281—293.

[40] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Contribution to the Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta. Math.*, **41** (1918), 119—196.
[41] Hardy, G.H., Ramanujan, S., Asymptotic formula in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2), **17** (1918), 75—115.
[42] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Some problems of "patitio numerorum" III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta. Math.*, **44** (1923), 1—70; V: A further contribution to the study of Goldbach's problem, *Proc. London Math. Soc.* (2), **22** (1923), 45—56.
[43] Hardy, G.H., Wright, E.M., An Introduction of the Theory of Number, Oxford, 1954.
[44] Haselgrove, C.B., Some theorem in the analytic theory, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 273—277.
[45] Heilbronn, H., Landau, E., Scherk, P., Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen, *Časopis Pěst. Mat.*, **65** (1936), 117—141.
[46] Heilbronn, H., 见 *Zentrablatt für Math. und ihre Grenzgebiete*, **16** (1937), 291—292.
[47] 华罗庚, Some results in the additive prime number theory, *Quart. J. Math. Oxford*, **9** (1938), 68—80.
[48] ——————, 堆垒素数论,科学出版社,1957.
[49] ——————, 一个求极限的问题,中国科学,**2**(1951),393—402.
[50] ——————, 指数和的估计及其在数论中的应用,科学出版社,1963.
[51] ——————, 数论导引,科学出版社,1975.
[52] Huxley, M.N., The Distribution of Prime Numbers, Oxford, 1972.
[53] ——————, On the difference between consecutive primes, *Invent. Math.*, **15** (1972), 164—170.
[54] ——————, Large value of Dirichlet polynomials, *Acta. Arith.*, **24** (1973), 329—346; II, *Acta. Arith.*, **25** (1974), 159—169; III, *Acta. Arith.*, **26** (1974—75), 435—444; IV, *Acta. Arith.*, **32** (1977), 297—312.
[55] Ingham, A.E., Mean-value theorem in the theory of the Riemann Zeta-function, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27** (1926), 273—300.
[56] ——————, On the difference between consecutive primes, *Quart. J. Math. Oxford*, **8** (1937), 255—266.
[57] ——————, On the estimation of N(σ,T), *Quart. J. Math. Oxford*, **11** (1940), 291—292.
[58] Jurkat, W.B., Richert, H.-E., An improvement of Selberg's sieve method I, *Acta. Arith.*, **11** (1965), 217—240.
[59] Jutila, M., On Linnik's constant, *Math. Scand.*, **41** (1977), 45—62.
[60] Карацуба, А. А., Основы Аналитической Теории Чисел, Наука, 1975.
[61] Kátai, I., A comment on a paper of Ju. V. Linnik, *Magyer Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **17** (1967), 99—100.

[62] Климов, Н. И., Пильтяй, Г. З., Шептицкая, Т. А., Представление натуральных чисел суммами ограниченног числа простых чисел, *В сб. «Исслед. по Теории Чисел»*, Вып. 1, Куйбышев, 1971, 44—47; Оценка абсолютной постоянной в проблеме Гольдбах-Шнирельмана, *В сб. «Исслед. по Теории Чисел»*, Вып. 4, Саратов, 1972, 35—51.

[63] Климов, Н. И., Улучшение оценки абсолютной постоянной в проблеме Гольдбаха-Шнирельмана, *Науч. Тр. Куйбышев. Гос. Пед. ин-т.*, **158** (1975), 14—30.

[64] Knopowski, S., On Linnik's theorem concerning exceptional L-zeros, *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 168—178.

[65] Kuhn, P., Zur Viggo Brun'schen Siebmethode. I, *Norske Vid. Selsk. Forth., Trondhjem*, **14** (1941), 145—148.

[66] ——————, Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode, *12. Skand. Mat. Kongr., Lund*, 1953, 160—168.

[67] ——————, Über die Primteiler eines Polynoms, *Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam*, **2** (1954), 35—37.

[68] Кузяшев, А. А., Чечуро, Е. Ф., О представлении больших целых чисел суммами простых чисел, *В сб. «Исслед. по Теории Чисел»*, **3** Сарат. ун-та, Саратов, 1969, 46—50.

[69] Левин, Б. В., Распределение «почти простых» чисел в целозначных полиноминальных последовательностях, *ДАН УзССР*, 1962, 11, 7—9; 题目同上, *Мат. сб.*, **61** (1963), 389—407.

[70] ——————, Метод решета и его применения, докторская диссертация, МГУ, 1963.

[71] ——————, Файнлейб, А. С., Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел, *УМН*, **22**(1967), 3, 119—197.

[72] Линник, Ю. В., Большое решета, *ДАН СССР*, **30**(1941), 290—292.

[73] ——————, On the least prime in an arithmetic progression, I: The basic theorem, *Мат. сб.*, **15** (1944), 139—178; II: The Deuring-Heilbronn's phenomenon, *Мат. сб.*, **15** (1944), 347—368.

[74] ——————, О возможности единого метода в некоторых вопросах "аддитивной" и "дистрибутивной" теории простых чисел, *ДАН СССР*, **49** (1945), 3—7.

[75] ——————, О густоге нулей L-рядов, *ИАН СССР*, **10** (1946), 35—46.

[76] ——————, Новые доказательство теоремы Гольдбах-Виноградова, *Мат. сб.*, **19** (1946), 3—8.

[77] ——————, Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарных задач с простыми числами, *ДАН СССР*, **77**(1951), 15—18; Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарных проблемы Гольдбах, *ИАН СССР, Сер. Мат.*, **16** (1952), 503—530.

[78] ——————, Все большие числа ——суммы простого и двух квадратов (О проблеме Гарди, Литтльвуда), II, *Мат. сб.*, **53**(1961), 3—38.

[79] 闵嗣鹤，谈一个求极限问题，数学学报，4(1954)，381—384.

[80] ————，严士健，初等数论，高等教育出版社，1957.
[81] 闵嗣鹤，数论的方法(上)，科学出版社，1958.
[82] Montgomery, H.L., Topics in Multiplicative Number Theory, Lecture Notes in Math. 227, Springer-Verlag, 1971.
[83] ————, Vaughan R. C., The exceptional set in Goldbach's problem, *Acta. Arith.*, **27** (1975), 353—370.
[84] 潘承洞，堆垒素数论的一些新结果，数学学报，**9**(1959)，315—329.
[85] ————，表偶数为素数及殆素数之和，数学学报，**12**(1962)，95—106; *Sci. Sin.*, **11** (1962), 873—888.
[86] ————，表大偶数为素数及一个不超过四个素数的乘积之和，山东大学学报，**4** (1962)，40—62; *Sci. Sin.*, **12** (1963), 455—473.
[87] ————，Ю. В. Линник，大筛法的一个新应用，数学学报，**14**(1964)，597—608; *Sci. Sin.*, **13** (1964), 1045—1053.
[88] ————，丁夏畦、王元， On the representation of every large even integer as a sum of a prime and almost prime, *Sci. Sin.*, **18** (1975), 599—610.
[89] 潘承洞，丁夏畦，一个均值定理，数学学报，**18** (1975)，254—262；数学学报，**19** (1976)，217—218.
[90] ————, A new mean value theorem, *Sci. Sin.*, Special Issue (II), 1979, 149—161.
[91] 潘承彪，三素数定理的一个新证明，数学学报，**20** (1977)，206—211.
[92] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer-Verlag, 1957.
[93] ————, Über die Anwendung einer Methode von Linnik, *Acta. Arith.*, **29** (1976), 367—376.
[94] Rademacher, H., Beiträge Zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **3** (1924) 12—30.
[95] Ramachandra, K., On the number of Goldbach numbers in small intervals, *J. Indian Math. Soc.*, **37** (1973), 157—170.
[96] ————, A simple proof of the mean forth power estimate for $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ and L $(\frac{1}{2}+it, \chi)$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **4** (1974), 81—97.
[97] ————, Application of a theorem of Montgomery and Vaughan to the Zeta function, *J. London. Math. Soc.* (2), **10** (1975), 482—486.
[98] ————, Two remarks in prime number theory, *Bull. France Math. Soc.*, **105** (1977), 433—437.
[99] Rényi, A., О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, *ДАН СССР*, **56** (1947), 455—458; *ИАН СССР. Сер. мат.*, **12**(1948), 57—78.
[100] ————, On the large sieve of Ju. V. Linnik, *Compositio Math.*, **8** (1950), 68—75.
[101] ————，数论中的概率方法，数学进展，**4**(1958)，465—510.
[102] Ricci, G., Su la congettura di Goldbach e la constante di Schnirelmann, *Boll. Un. Mat. Ital.*, **15**(1936), 183—187; 题目同上，I, *Ann. Scuola*

Norm. Sup. Pisa (2), **6**(1937), 71—90; II, **6**(1937), 91—116.
[103] Richert, H.-E., Selberg's sieve with weights, *Mathematika*, **16**(1969), 1—22.
[104] Riemann, B., Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß*, 2,, Aufl, 1859, 145—155.
[105] Родосский, К. А., О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии и нулях L-функций, *ДАН СССР*, **88**(1953), 753—756; О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, *Мат. сб.*, **34** (1954), 331—356.
[106] Романнов, Н. П., К проблеме Гольдбах, *Томск, Изв. ин. Мат. и Тех. ун-та*, I, 1935, 34—38.
[107] Ross, P. M., On Chen's theorem that each large even number has the form p_1+p_2 or $p_1+p_2p_3$, *J. London Math. Soc.* (2), **10**(1975), 500—506.
[108] Roth, K. F., On the large sieves of Linnik and Rényi, *Mathematika*, **12** (1965), 1—9.
[109] Шнирельман, Л. Г., Об аддитивных свойствах чисел, *Ростов, Н/Д, Изв. Донск. Политехн ин-та.*, **14**(1930), 3—28; Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, **107**(1933), 649—690.
[110] Selberg, A., On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch .Math. Naturvid*, **47** (1943), no. 6, 87—105.
[111] ———, On an elementary method in the theory of prime, *Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem*, **19**(1947), 64—67.
[112] ———, On elementary methods in prime number theory and their limitation, *11 Skand. Mat. Kongr., Trondhjem*, 1949, 13—22.
[113] ———, The general sieve method and its place in prime number theory, *Proc. Inter. Cong. Math., Cambridge, Mass.*, **1**(1950), 286—292.
[114] Shapiro, H. N., Warga, J., On the representation of large integers as sums of primes, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3**(1950), 153—176.
[115] Siebert, H., Darstellung als summe von Primzahlen, Diplomarbeit, 1968.
[116] Тартаковский, В. А., О некоторых суммах типа Viggo Brun'a *ДАН СССР*, **23** (1939), 122—126.
[117] ———, Метод избирательного «приближенного решета», *ДАН СССР*, **23**(1939), 127—130.
[118] Titchmarch, E. C., The Theory of Function, Oxford, 1952.
[119] ———, The theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford, 1951.
[120] Чудаков, Н. Г., О проблеме Гольдбаха, *ДАН СССР*, **17**(1937), 331—334.
[121] ———, О плотности совокупности четных чисел, не представимых как сумма двух нечетных простых, *ИАН СССР*, **1**(1938), 25—40.
[122] ———, On the Goldbach-Vinogradov's theorem, *Ann. Math.* (2), **48** (1947), 515—545.

[123] ——————, Введение в Теорию L-функций Дирихле, Гостехиздат, 1947.

[124] Turán, P., Über eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, Akad. Kiadó Budapest 1953.

[125] ——————, 数学分析中的一个新方法,数学进展,2(1956),311—565.

[126] Vaughan, R. C., On Goldbach's problem, *Acta. Arith.*, 22(1972), 21—48.

[127] ——————, Mean value theorem in prime number theory, *J. London Math. Soc.* (2), 10(1975), 153—162.

[128] ——————, A note on Šnirel'man's approach to Goldbach's problem, *Bull. London Math. Soc.* 8(1976), 245—250.

[129] ——————, On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290(1977), 93—108.

[130] Виноградов, А. И., Применение ζ(s) к Решету Эратосфена, *Мат. сб.*, 41(1957), 49—80; 415—416.

[131] ——————, О плотностной гипотезе для L-функции Дирихле, *ИАН СССР сер. мат.*, 29(1965), 903—934; 30(1966), 719—720.

[132] Виноградов, И. М., Представление нечётного числа суммой трёх простых чисел, *ДАН СССР*, 15(1937), 291—294.

[133] ——————, Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел, *Труды Тбилисск. мат. ин.*, 3 (1938), 1—33.

[134] ——————, Einige allgemeine Primzahlsätze, *Труды Тбилисск. мат. ин.*, 3 (1938), 35—67

[135] ——————, Избранные труды, Изд. АН СССР, 1952.

[136] ——————, Новая оценка функции ζ(1 + it), *ИАН СССР Сер. Мат.*, 22(1958), 161—164.

[137] ——————, Основы Теории Чисел, Наука, 1965.

[138] ——————, Метод Тригонометрических Сумм в теории чисел, Наука, 1971.

[139] ——————, Особые Варианты Метода тригонометрических Сумм, Наука, 1976.

[140] 王元，表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和,数学学报,6(1956),500—513.

[141] ——————,表大偶数为一个素数及一个不超过四个素数的乘积之和,数学学报,6(1956),565—582.

[142] ——————，论筛法及其有关的若干问题,科学记录,1(1957),9—11;表整数为素数及殆素数之和,数学学报,10(1960),168—181.

[143] ——————，表大偶数为二个殆素数之和,科学纪录,1(1957),267—270;论筛法及其有关的若干应用(I),数学学报,8(1958),413—429; *Sci. Sin.*, 8(1959),357—381.

[144] ——————, On the representation of large integer as a sum of a prime and an almost prime, *Sci. Sin.*, 11(1962), 1033—1054.

[145] ——————, On Линник'S method concerning the Goldbach number, *Sci. Sin.*, 20(1977),16—30.

[146] 吴方,素数变数的线性方程组,数学学报,7(1957),102—121.

[147] 尹文霖,关于表充分大的整数为素数和,北京大学学报(自然科学), 3(1956), 323—326.